Università degli Studi di Siena

Correzione prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

14 marzo 2022

Compito Unico

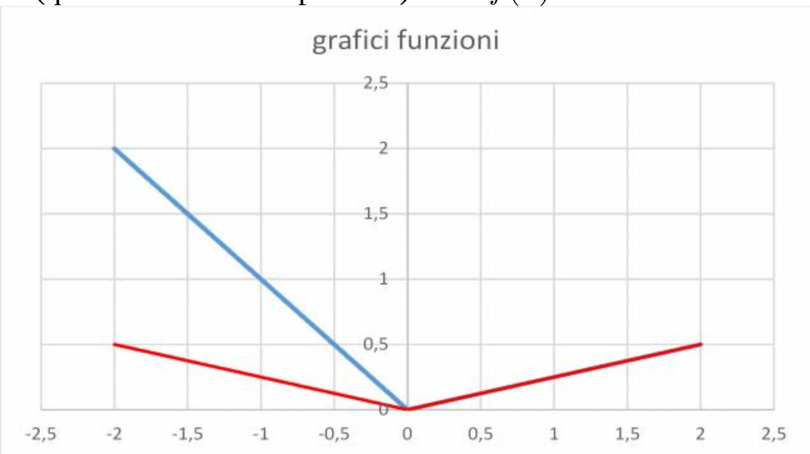
1) *PRIMO METODO - CON LE OPERAZIONI INSIEMISTICHE*: per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(B \cap C)$, da cui $\mathcal{C}\big(\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)\big) = \mathcal{C}\big(\mathcal{C}(B \cap C)\big) = B \cap C$; e di conseguenza da $A \subset \mathcal{C}\big(\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)\big)$ segue banalmente $A \subset \big(B \cap C\big)$.

   SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI APPARTENENZA:

A	B	C	$\mathcal{C}(B)$	$\mathcal{C}(C)$	$\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)$	$\mathcal{C}(\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C))$	$A \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C))$	$B \cap C$	$A \subset (B \cap C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	**V**	$\in$	**V**
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	F		
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	F		
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	F		
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	**V**	$\in$	**V**
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	**V**	$\notin$	**V**
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	**V**	$\notin$	**V**
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	**V**	$\notin$	**V**

   Consideriamo nella tavola di appartenenza solo le righe dove l'inclusione $A \subset \mathcal{C}\big(\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)\big)$ è vera, come evidenziato in grassetto in tutte queste righe l'inclusione $A \subset \big(B \cap C\big)$ risulta ancora vera.

2) Di seguito i grafici delle funzioni $f(x)$ (in blu) e $g(x)$ (in rosso); come è facile notare il grafico della $g(x)$ si ottiene per simmetria, rispetto all'asse delle ordinate, del ramo ramo destro (quello sulle ascisse positive) della $f(x)$.



   Per determinare l'insieme $g([-1/2, 1/2])$, possiamo notare che $g(x)$ è strettamente monotona decrescente in $[-1/2, 0]$, crescente in $[0, 1/2]$, con $g(-1/2) = g(1/2) = 1/8$ e $g(0) = 0$; pertanto $g([-1/2, 1/2]) = [0, 1/8]$.

3) $\lim_{x \to \pm 1} e^{x^2} + 1 = e + 1$ mentre $\lim_{x \to \pm 1} m\,x + q = q \pm m$, la funzione risulterà continua in tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $q \pm m = e + 1$ ovvero $m = 0$ e $q = e + 1$. Il quesito proposto può essere risolto anche notando che la funzione di equazione $y = e^{x^2} + 1$ è funzione pari, di conseguenza $f(x)$ è continua in tutto l'insieme dei numeri reali se e solo anche la funzione di equazione $y = m\,x + q$ è funzione pari, e ciò si verifica solo se $m = 0$; per determinare il valore di q è allora sufficiente porre $q = \lim_{x \to \pm 1} e^{x^2} + 1 = e + 1$.

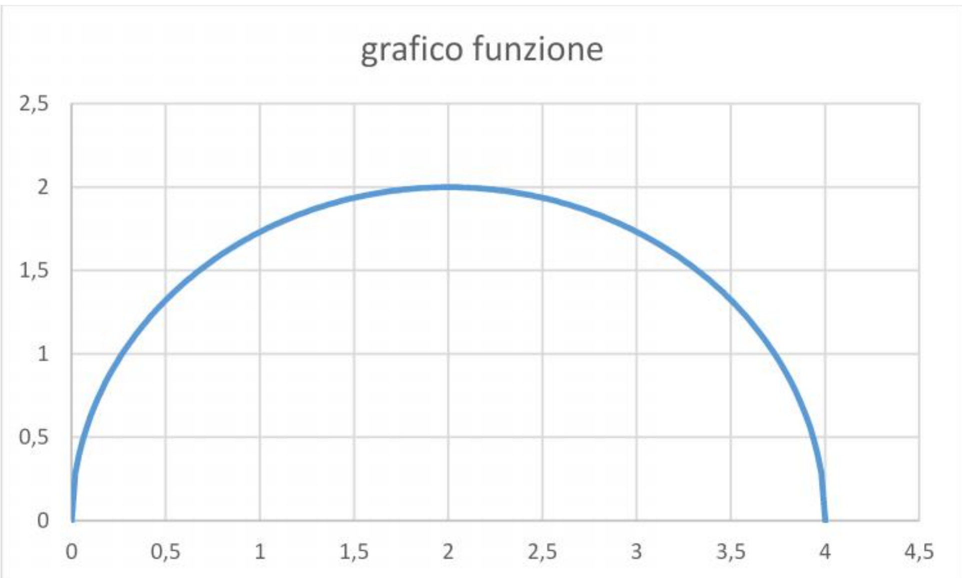
4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{log(1 - sen\, x^2)}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} - \dfrac{\frac{log(1 - sen\, x^2)}{-sen\, x^2} \cdot \frac{sen\, x^2}{x^2}}{\frac{1 - cos\, x}{x^2}} = - \dfrac{(\to 1) \cdot (\to 1)}{(\to \frac{1}{2})} = -2.$

Per il secondo limite posto $y = 3^x$ si ottiene: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3^x}\right)^{3^x} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^y = e.$

5) $C.E.$: $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$, $C.E. = [0, 4]$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0,\ \forall x \in C.E.$, in quanto y è una funzione irrazionale di ordine pari, in particolare y è una radice quadrata.
$y = 0$ se e solo se $\sqrt{4x - x^2} = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee x = 4)$. Intersezioni con gli assi nei punti $O(0,0)$ e $A(4,0)$.
La funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato ed è composizione di funzioni continue, quindi è funzione continua nel suo $C.E.$, non sono necessari i limite agli estremi del suo $C.E.$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \dfrac{\cancel{2}(2 - x)}{\cancel{2}\sqrt{4x - x^2}} = \dfrac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$. $y' > 0$ se $2 - x > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$. Funzione strettamente crescente in $[0, 2]$, strettamente decrescente in $[2, 4]$. Massimo assoluto in $M(2, 2)$, mimino assoluto nei punti $O(0,0)$ e $A(4,0)$. La funzione non è derivabile in $x = 0$ e in $x = 4$, in particolare risulta: $\lim_{x \to 0} y' = \lim_{x \to 0} \dfrac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty$ e $\lim_{x \to 4} y' = \lim_{x \to 4} \dfrac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = -\infty$; $O(0,0)$ e $A(4,0)$ sono punti di stop del grafico della funzione a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-1 \cdot \sqrt{4x - x^2} - (2 - x) \cdot \frac{2-x}{\sqrt{4x - x^2}}}{\left(\sqrt{4x - x^2}\right)^2} = - \dfrac{4x - x^2 + (2 - x)^2}{\left(\sqrt{4x - x^2}\right)^3} = - \dfrac{4}{\left(\sqrt{4x - x^2}\right)^3}$. $y'' < 0,\ \forall x \in \,]0, 4[$. Funzione strettamente concava. Nessun punto di flesso.

Grafico:



.

6) $\displaystyle\int_3^4 \sqrt[3]{x^2-6x+9}\,dx \;=\; \int_3^4 \sqrt[3]{(x-3)^2}\,dx \;=\; \int_3^4 (x-3)^{\frac{2}{3}}\,dx \;=$

$$\left(\frac{3}{5}(x-3)^{\frac{5}{3}}\right)_3^4 \;=\; \left(\frac{3}{5}(4-3)^{\frac{5}{3}}\right) \;-\; \left(\frac{3}{5}(3-3)^{\frac{5}{3}}\right) \;=\; \frac{3}{5}\,.$$

7) Se una funzione è derivabile in x_0, la sua retta tangente ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$; inoltre se $f'(x_0) \neq 0$, la perpendicolare alla retta tangente nello stesso punto ha equazione $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$. Nel caso specifico $f(x_0)=0$, $f'(x) = \;-e^{-x}\cdot log(1+x) + e^{-x}\cdot\dfrac{1}{1+x} \;=$ $e^{-x}\left(\dfrac{1}{1+x} - log(1+x)\right)$, con $f'(x_0) = 1 \neq 0$. Le equazioni della retta tangente e della sua perpendicolare sono rispettivamente $y = x$ e $y = -x$.

8)
$$f'_x = -\frac{e^{z+w}\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{2x\,e^{z+w}}{(x^2-y^2)^2}\;;$$

$$f'_y = -\frac{e^{z+w}\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2y\,e^{z+w}}{(x^2-y^2)^2}\;;$$

$$f'_z = f'_w = \frac{e^{z+w}}{x^2-y^2} = f(x,y,z,w)\,.$$