

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

14 marzo 2022

Compito Unico ✓

- 1) (6 punti) Siano dati tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sapendo che  $A \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C))$ , possiamo concludere con certezza che  $A \subset (B \cap C)$ ? (Giustificare la risposta - l'insieme  $\mathcal{C}(X)$  è il complementare dell'insieme  $X$ )
- 2) (7 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[0, 2]$  e  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{per } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ , e sia  $g(x) = f(|x|)$ . Disegnare i grafici delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  e determinare l'insieme  $g([-1/2, 1/2])$ .
- 3) (6 punti) Si consideri la funzione  $f(x) = \begin{cases} mx + q & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{x^2} + 1 & \text{se } x < -1 \vee 1 < x \end{cases}$ .  
Indicare, se esistono, valori dei parametri  $m$  e  $q$  che rendono la funzione continua in tutto l'insieme dei numeri reali.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \sin x^2)}{1 - \cos x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^x}\right)^{3^x}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione  $y = \sqrt{4x - x^2}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_3^4 \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9} dx$ .
- 7) (7 punti) Determinare le equazioni della retta tangente e della perpendicolare alla retta tangente della funzione  $f(x) = e^{-x} \cdot \log(1+x)$  nel punto di ascissa  $x_0 = 0$ .
- 8) (8 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione  $f(x, y, z, w) = \frac{e^{z+w}}{x^2 - y^2}$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.