Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)
30 maggio 2022

Compito Unico

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $\neg(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$ è falsa, $\neg(r \Leftrightarrow q)$ è vera e p è falsa, quindi $r \Leftrightarrow q$ è falsa; dalla falsità di p e dalla verità di $p \Leftrightarrow r$ segue che r è falsa ed infine dalla falsità di r e di $r \Leftrightarrow q$ si ottiene che q è vera. Riassumendo, sotto le ipotesi poste risulta che p e r sono false mentre q è vera.

SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ:

p	q	r	$r \Leftrightarrow q$	$\neg(r \Leftrightarrow q)$	$\neg(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow r$
V	V	V	V	F	V	
V	V	F	F	V	V	
V	F	V	F	V	V	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	V	F	V	
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	

Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove $\neg(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$ è falsa, come evidenziato in grassetto, l'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste è quello in cui p e r sono false e q è vera.

2) La funzione proposta è sicuramente continua in tutti i numeri reali diversi da 0 e 2, per la continuità di f in 0 deve risultare $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ ovvero $\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0^+} ax + b = b$, quindi $b = 0$. Per la continuità di f in 2 deve risultare $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ ovvero $\lim_{x \to 2^-} ax + b = 2a + b = 2a = \lim_{x \to 2^+} 4 = 4$, da cui $a = 2$.

3) $h(x) = f(g(f(x))) = f(g(1+x)) = f(3^{1-(1+x)}) = f(3^{-x}) = 1 + 3^{-x}$. Per l'inversa di h posto $y = 1 + 3^{-x}$ risulta $3^{-x} = y - 1$, da cui $-x = log_3(y-1)$ ed in conclusione $x = -log_3(y-1)$; $h^{-1}(x) = -log_3(x-1)$.

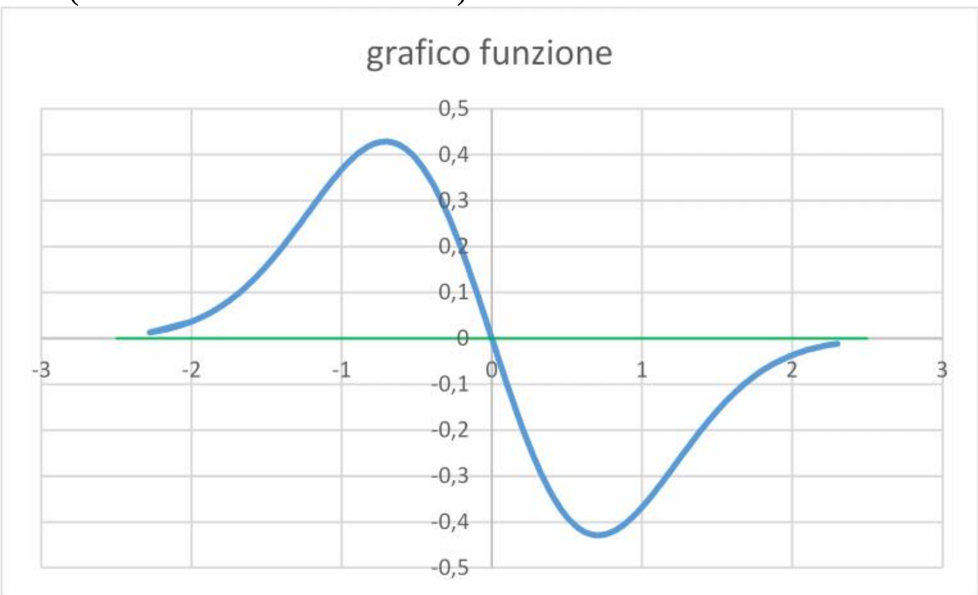
4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(sen(3x))}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(sen(3x))}{sen^2(3x)} \cdot \dfrac{sen^2(3x)}{9x^2} \cdot 9 = \left(\to \dfrac{1}{2}\right) \cdot (\to 1) \cdot 9 = \dfrac{9}{2}$. Per il secondo limite risulta $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$, pertanto $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2^x}\right)^{2^x} = e$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

$y(-x) = -(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = x \cdot e^{-x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi), la studiamo solo nel semiasse positivo delle ascisse ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $-x \cdot e^{-x^2} \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$. Funzione negativa nel semiasse positivo delle ascisse. $y = 0$ se $-x \cdot e^{-x^2} = 0$ che è soddisfatta solo nel punto $x = 0$ ($y(0) = 0$), unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

$\lim_{x \to +\infty} -x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^{x^2}} = 0$, in quanto $x = o\left(e^{x^2}\right)$per $x \to +\infty$.
$AsOr$ di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = -1 \cdot e^{-x^2} + (-x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) =$
$\left(2x^2 - 1\right) \cdot e^{-x^2}$. $y' \geq 0$, se $2x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$. Funzione strettamente decrescente in $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$, strettamente crescente in $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$; punto di minimo assoluto $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, di ordinata $y\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} =$
$-\sqrt{\frac{1}{2e}}$.
Concavità e convessità: $y'' = 4x \cdot e^{-x^2} + \left(2x^2 - 1\right) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) =$
$2x \cdot \left(3 - 2x^2\right) \cdot e^{-x^2}$. $y'' \geq 0$, se $3 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.
Funzione strettamente convessa in $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, strettamente concava in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$; flessi per $x = 0$ e per $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$.
Punti di flesso $O(0,0)$ e $F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (x + 1 - sen\, x)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + cos\, x\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$
$\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\,\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7) Tramite la formula del differenziale, la funzione $f(x)$ può essere approssimata nel punto $x_0 + h$ come: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. Nel caso specifico

$f(x_0) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2,\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ con $f'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}$ ed infine $\sqrt[3]{8.12} = \sqrt[3]{8 + 0.12} \approx 2 + \dfrac{1}{12} \cdot 0.12 = 2.01$.

8) $\nabla f = (2x + 2xy^2,\ -2y + 2x^2y)$.

FOC: $\begin{cases} 2x + 2xy^2 = 0 \\ -2y + 2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(y^2+1) = 0 \\ 2y(x^2-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, unico punto critico $O(0,0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & -2+2x^2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & -2+2x^2 \end{vmatrix} =$
$(2+2y^2)(-2+2x^2) - (4xy)^2 = 4(x^2 - y^2 - 3x^2y^2 - 1)$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = -4 < 0$. O punto di sella.