Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)
8 settembre 2022

Compito Unico

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $(p \Leftrightarrow q)\ e\ (q \Rightarrow \neg p)$ è vera, $p \Leftrightarrow q$ e $q \Rightarrow \neg p$ sono entrambe vere, ma questo implica che p e q sono entrambe false, inoltre in questo particolare caso $p \Rightarrow \neg q$ è vera; non resta altro da concludere che la proposizione proposta è sempre vera, quindi è una tautologia.

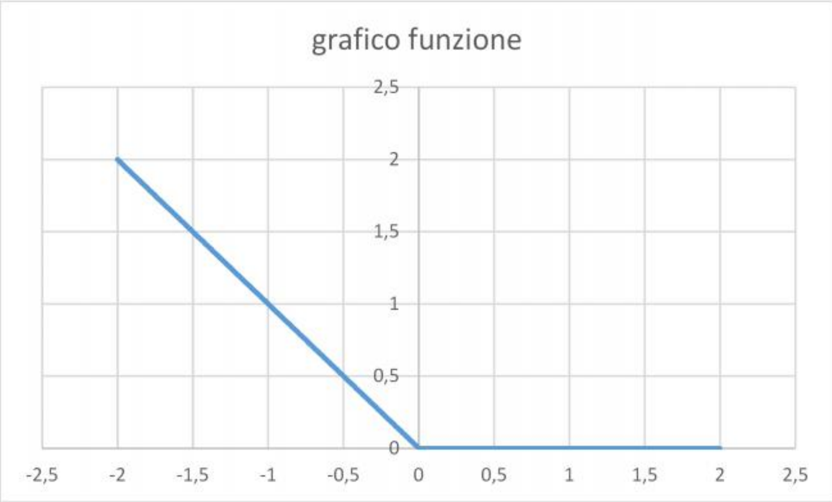
SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow \neg p$	$(p \Leftrightarrow q)\ e\ (q \Rightarrow \neg p)$	$p \Rightarrow \neg q$	$((p \Leftrightarrow q)\ e\ (q \Rightarrow \neg p)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Come indicato sulla colonna finale, la proposizione proposta è una tautologia.

2) $f(g(x)) = f(x^2+2x) = log\left(\frac{1+x^2+2x}{x^2+2x}\right) = log\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right)$. Per determinare il suo campo di esistenza dobbiamo porre $\frac{(x+1)^2}{x^2+2x} > 0$; studiamo separatamente numeratore e denominatore: $(x+1)^2 > 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$; $x^2+2x > 0 \Leftrightarrow x(x+2) > 0$, anche in questo caso studiamo separatamente i due fattori: $x > 0$ e $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$, quindi $x^2+2x > 0$ se e solo se $x < -2 \vee x > 0$; con la condizione determinata sul denominatore quella sul numeratore diventa del tutto ininfluente, quindi $C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x < -2 \vee x > 0\} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. Affinché $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = -\infty$ deve verificarsi $\lim_{x \to x_0} log\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right) = -\infty$ e questo si verifica se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 0$ e per verificarsi ciò è necessario che $\lim_{x \to x_0} (x+1)^2 = 0$ ovvero $x_0 = -1$, ma -1 non è punto di accumulazione del campo di esistenza di $f(g(x))$ pertanto non esistono valori reali x_0 tale per cui $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = -\infty$.

3) Di seguito il grafico della funzione $f(x)$.



Per determinare l'insieme $f([-1,1])$, possiamo notare che $f(x)$ è monotona decrescente nel suo dominio con $f(-1)=1$ e $f(1)=0$; pertanto $f([-1,1])=[0,1]$; per il secondo insieme risulta $f(f([-1,1]))=f([0,1])$ e $f(0)=0$, quindi sempre per la monotonia decrescente di f si ha $f(f([-1,1]))=\{0\}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(1-cos\,x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(1-cos\,x)}{1-cos\,x}\cdot\dfrac{1-cos\,x}{x^2} = (\to 1)\cdot\left(\to\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^{3-x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} = \dfrac{(\to 1)}{(\to e^3)} = e^{-3}$.

5) $C.E.$: $x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$; $C.E.=\mathbb{R}^*=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$.

$y(-x)=(-x)^2-\dfrac{1}{(-x)^2}=x^2-\dfrac{1}{x^2}=y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo nel semiasse positivo delle ascisse ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y\geq 0$ se $x^2-\dfrac{1}{x^2}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^4-1}{x^2}\geq 0 \Rightarrow x^4-1\geq 0 \Rightarrow x^4\geq 1 \Rightarrow x\geq 1$. Funzione negativa in $]0,1[$, positiva in $]1,+\infty[$; intersezione con l'asse delle ascisse in $A(1,0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-\dfrac{1}{x^2} = (\to 0)-(\to +\infty) = -\infty$. AsV di equazione $x=0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\dfrac{1}{x^2} = (\to +\infty)-(\to 0) = +\infty$. La funzione non presenta asintoto orizzontale.

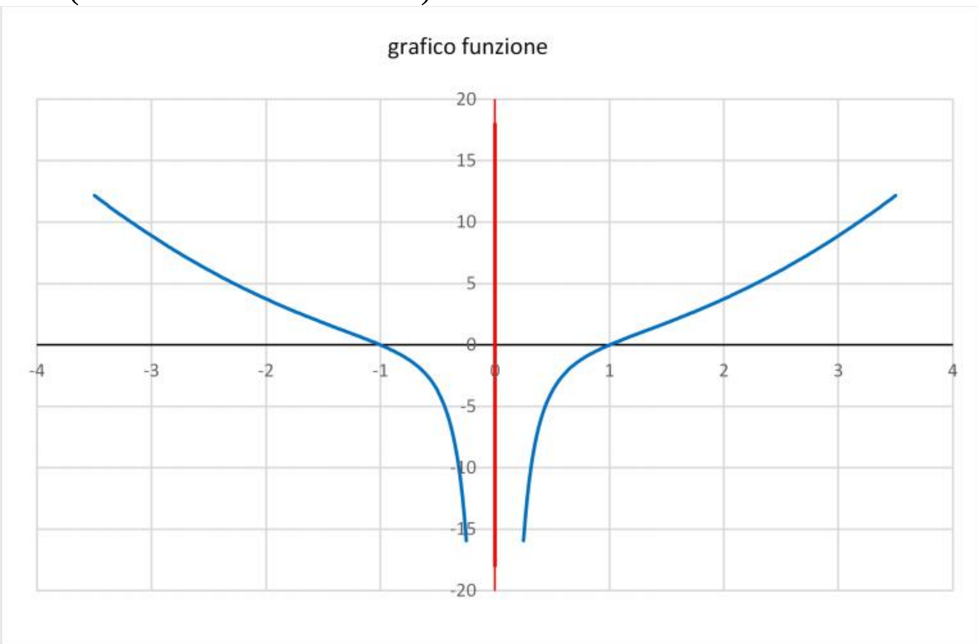
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-\frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x-\dfrac{1}{x^3} = (\to +\infty)-(\to 0) = +\infty$. La funzione non presenta asintoto obliquo.

Crescenza e decrescenza: $y'=2x+\dfrac{2}{x^3}$. $y'>0,\ \forall x>0$. Funzione strettamente crescente nel semiasse positivo delle ascisse.

Concavità e convessità: $y''=2-\dfrac{6}{x^4}=\dfrac{2(x^4-3)}{x^4}$. $y''\geq 0$, se $x^4-3\geq 0 \Rightarrow x^4\geq 3 \Rightarrow x\geq\sqrt[4]{3}$. Funzione strettamente concava in $\left]0,\sqrt[4]{3}\right]$, strettamente convessa in $\left[\sqrt[4]{3}, +\infty\right[$; punto di flesso ascendente per $x = \sqrt[4]{3}$,

$y\left(\sqrt[4]{3}\right) = \left(\sqrt[4]{3}\right)^2 - \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. Punto di flesso $F\left(\sqrt[4]{3}, \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale):



.

6) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx = \int_1^2 \left(x^3 - x^{\frac{1}{3}}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)_1^2 =$
$\displaystyle\left(4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{16}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

7) La generica retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto x_0 ha equazione $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$. Nel caso specifico si ha $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = (1 + 2\,x) \cdot e^{2x}$ con $f'(0) = 1$. L'equazione della retta richiesta è $y = x$.

8) $\nabla f = (2xy + y - 4x, x^2 + x)$.

$$FOC: \begin{cases} 2xy + y - 4x = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy + y - 4x = 0 \\ x(x+1) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \searrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \end{matrix}$$, due punti

critici $O(0,0)$ e $A(-1,4)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2y-4 & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 2y-4 & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{vmatrix} = -(2x+1)^2$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = |\mathcal{H}f(A)| = -1 < 0$. O e A punti di sella.