

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

8 settembre 2022

Compito Unico ✓

- 1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici  $p$  e  $q$ ; indicare se la proposizione composta seguente è una tautologia, una contraddizione o né una tautologia né una contraddizione:

$$((p \Leftrightarrow q) \text{ e } (q \Rightarrow \neg p)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q).$$

- 2) (8 punti) Siano date le funzioni  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{x}\right)$  e  $g(x) = x^2 + 2x$ ; determinare l'espressione della funzione composta  $f(g(x))$ , il suo campo di esistenza ed indicare se esiste un valore reale  $x_0$  tale per cui  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = -\infty$ .

- 3) (6 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[0, 2]$  e

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}. \text{ Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi } f([-1, 1]) \text{ e } f(f([-1, 1])).$$

- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x}{x}\right)^{3-x}$ .

- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_1^2 (x^3 - \sqrt[3]{x}) dx$ .

- 7) (6 punti) Sia data la funzione  $f(x) = x \cdot e^{2x}$ ; determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto  $x_0 = 0$ .

- 8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2y + xy - 2x^2.$$

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.