Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

22 settembre 2022

Compito Unico

1) *PRIMO METODO* (con il ragionamento logico)

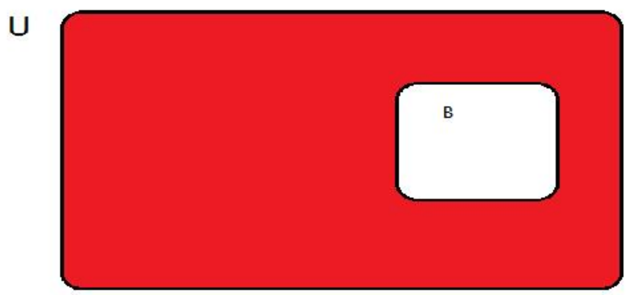
Se $A \subseteq \mathcal{C}(B)$ ogni elemento appartenente ad A non appartiene a B, quindi non vi sono elementi che appartengono sia ad A che a B, ne consegue che $A \cap B = \emptyset$ è certamente vera, in modo analogo da $B \subseteq \mathcal{C}(C)$ si ottiene che anche $B \cap C = \emptyset$ è certamente vera. Infine se $A \subseteq \mathcal{C}(B)$ e $B \subseteq \mathcal{C}(C)$ non necessariamente si verifica che $A \cap C = \emptyset$; come particolare esempio si consideri un universo formato dalle vocali dell'alfabeto italiano: $U = \{a, e, i, o, u\}$ e siano $A = \{a, e\}$, $B = \{o, u\}$ e $C = \{e, i\}$; come è facile varificare $A \subseteq \mathcal{C}(B)$, $B \subseteq \mathcal{C}(C)$ ma $A \cap C = \{e\} \neq \emptyset$.

SECONDO METODO (con la tavola di appartenenza - ricordiamo che la relazione insiemistica di inclusione equivale alla relazione logica di implicazione)

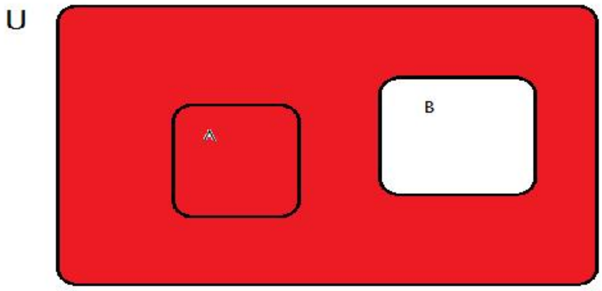
A	B	C	$\mathcal{C}(B)$	$\mathcal{C}(C)$	$A \subseteq \mathcal{C}(B)$	$B \subseteq \mathcal{C}(C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	F	F
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	F	V
$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	F
$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Consideriamo solo le cinque righe della tavola dove le condizioni $A \subseteq \mathcal{C}(B)$ e $B \subseteq \mathcal{C}(C)$ sono entrambe verificate (evidenziate in grassetto), come è facile riscontrare in nessuna di queste cinque righe si verifica che un elemento appartiene contemporaneamente ad A e B oppure appartiene contemporaneamente a B e C, mentre, come evidenziato nella terza riga, un elemento può appartenere contemporaneamente ad A e C. In conclusione le relazioni insiemistiche $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$ sono certamente vere, mentre la relazione $A \cap C = \emptyset$ non lo è.

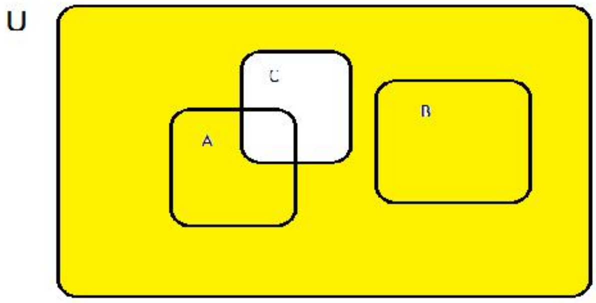
TERZO METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn)



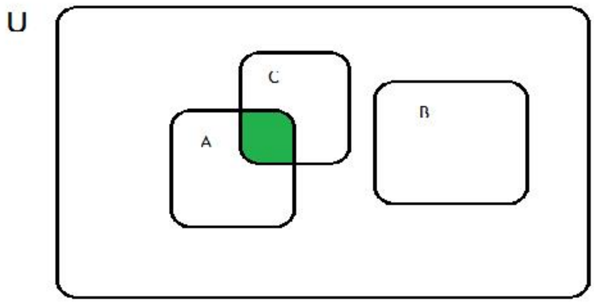
Si consideri la figura sopra, dove in rosso viene evidenziato l'insieme complementare di B, se $A \subseteq \mathcal{C}(B)$ l'insieme A deve necessariamente posizionarzi totalmente all'interno della regione in rosso, come nella figura in alto nella pagina successiva.



È quindi chiaro che $A \cap B = \emptyset$ è sicuramente vera. Consideriamo adesso un terzo insieme C e tale che $B \subseteq \mathcal{C}(C)$, evidenziamo in giallo l'insieme complementare di C, come nella figura che segue.

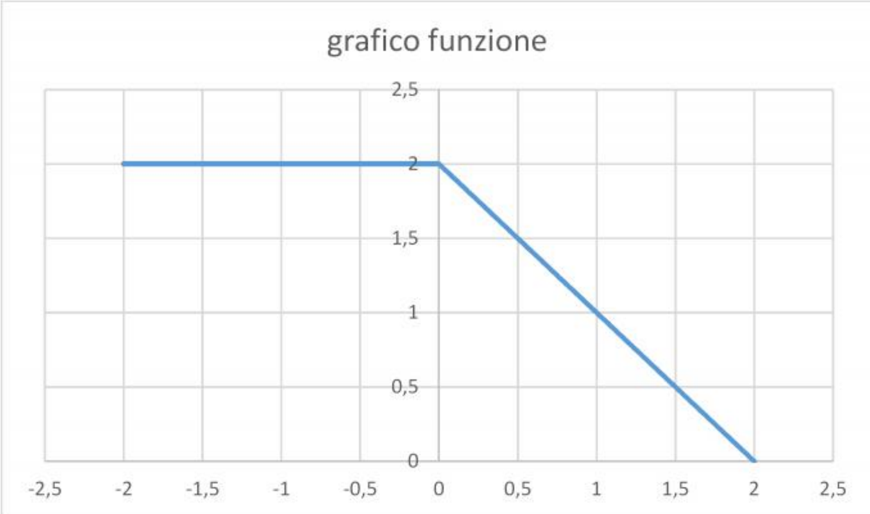


Se $B \subseteq \mathcal{C}(C)$, l'insieme B deve essere totalmente incluso nella parte gialla del diagramma, e in modo del tutto analogo al precedente segue che $B \cap C = \emptyset$ è vera. In conclusione possiamo notare nella figura seguente che $A \cap C = \emptyset$ non è necessariamente vera, insieme in verde.



2) $h(x) = f(g(1+x)) = f(1-(1+x)^2) = f(-2x-x^2) = 1+2(-2x-x^2)$
$1-4x-2x^2$.
$k(x) = g(1-f(x)) = g(1-(1+2x)) = g(-2x) = 1-(-2x)^2 = 1-4x^2$.
La disequazione $h(x) \leq k(x)$ equivale a $1-4x-2x^2 \leq 1-4x^2$ che può essere riscritta come $2x^2-4x \leq 0$, ovvero $2x(x-2) \leq 0$ che ha soluzione $0 \leq x \leq 2$.

3) Di seguito il grafico della funzione $f(x)$.



Per determinare l'insieme $f([-1,1])$, possiamo notare che $f(x)$ è monotona decrescente nel suo dominio con $f(-1)=2$ e $f(1)=1$; pertanto $f([-1,1])=[1,2]$; per il secondo insieme risulta $f(f([-1,1]))=f([1,2])$ e $f(2)=0$, quindi sempre per la monotonia decrescente di f si ha $f(f([-1,1]))=[0,1]$.

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)-2\,tg\,x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{tg\,2x}{2x}-2\cdot\dfrac{tg\,x}{x} = 2\cdot(\to 1)-2\cdot(\to 1)=0.$

$\lim_{x\to+\infty} log\left(\dfrac{2+x}{2\,x}\right) = \lim_{x\to+\infty} log\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right) = log\left(\to\dfrac{1}{2}\right) = log\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\,log\,2.$

5) $C.E.$: $x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$; $C.E.=\mathbb{R}^*=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

$y(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{(-x)^2} = x^2+\dfrac{1}{x^2} = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo nel semiasse positivo delle ascisse ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y\geq 0$ se $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq 0$, vera per ogni $x>0$. Funzione positiva nel semiasse positivo delle ascisse, nessuna intersezione con gli assi.

$\lim_{x\to 0^+} x^2+\dfrac{1}{x^2} = (\to 0)+(\to+\infty) = +\infty$. AsV di equazione $x=0$.

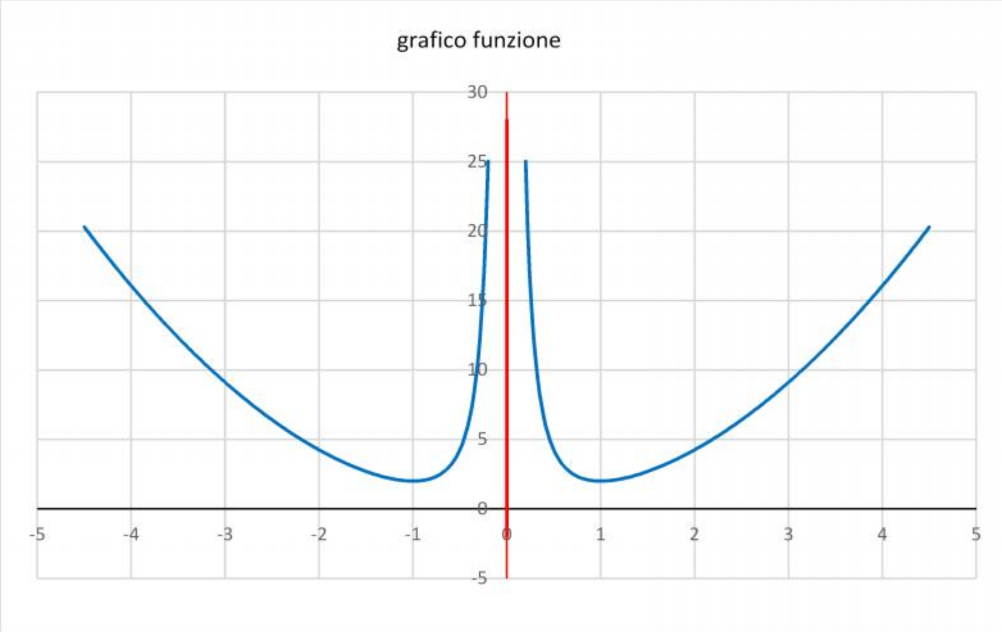
$\lim_{x\to+\infty} x^2+\dfrac{1}{x^2} = (\to+\infty)+(\to 0) = +\infty$. La funzione non presenta asintoto orizzontale.

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{x^3} = (\to+\infty)+(\to 0) = +\infty$. La funzione non presenta asintoto obliquo.

Crescenza e decrescenza: $y'=2x-\dfrac{2}{x^3}$. $y'>0$ se $2x-\dfrac{2}{x^3}>0 \Rightarrow \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}>0 \Rightarrow x^4-1>0 \Rightarrow x^4>1 \Rightarrow x>1$. Funzione strettamente decrescente in $]0,1]$, strettamente crescente in $[1,+\infty[$. Punto di minimo assoluto in $x=1$, $y(1)=2$.

Concavità e convessità: $y''=2+\dfrac{6}{x^4}$. $y''>0$, $\forall x>0$. Funzione strettamente convessa nel semiasse positivo delle ascisse, nessun punto di flesso.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale):



6) 1. Consideriamo $y = e^x$ come fattore differenziale e $y = x$ come fattore finito, risulta:

$$\int x \cdot e^x \, dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx = e^x \cdot x - e^x + c = e^x \cdot (x - 1) + c.$$

2. Consideriamo adesso $y = x^2$ come fattore differenziale e $y = \log x$ come fattore finito, risulta:

$$\int x^2 \cdot \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \log x - \int \frac{x^2}{3} \, dx =$$
$$\frac{x^3}{3} \cdot \log x - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9} \cdot (3 \log x - 1) + c\,.$$

7) La generica retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto x_0 ha equazione $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$. Nel caso specifico si ha $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 \cdot \log(1 - x) + (x + 1) \cdot \dfrac{-1}{1 - x}$ con $f'(0) = -1$. L'equazione della retta richiesta è $y = -x$.

8) $\nabla f = (5 - 2x, \, -8 - 2y)$.

FOC: $\begin{cases} 5 - 2x = 0 \\ -8 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -4 \end{cases}$, unico punto critico $A\left(\dfrac{5}{2}, -4\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$.

SOC: $|\mathcal{H}f(A)| = 4 > 0, \; f''_{xx}(A) = -2 < 0$. A è punto di massimo.