

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

22 settembre 2022

Compito Unico ✓

- 1) (6 punti) Siano dati tre insiemi A , B e C ; se $A \subseteq \mathcal{C}(B)$ e $B \subseteq \mathcal{C}(C)$, indicare (giustificando la risposta) quali fra le seguenti relazioni insiemistiche sono necessariamente vere:

1. $A \cap B = \emptyset$, 2. $B \cap C = \emptyset$, 3. $A \cap C = \emptyset$.

(Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X e con \emptyset l'insieme vuoto)

- 2) (8 punti) Siano date le funzioni $f(x) = 1 + 2x$ e $g(x) = 1 - x^2$; determinare le espressioni delle funzioni composte $h(x) = f(g(1+x))$ e $k(x) = g(1-f(x))$. Dopo aver determinato le espressioni di $h(x)$ e $k(x)$, risolvere la disequazione $h(x) \leq k(x)$.

- 3) (6 punti) Sia f una funzione con dominio $[-2, 2]$, codominio $[0, 2]$ e

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ 2-x & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}. \text{ Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi } f([-1, 1]) \text{ e } f(f([-1, 1])).$$

- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x) - 2 \operatorname{tg} x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{2+x}{2x}\right)$.

- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

- 6) (8 punti) Mediante il metodo di integrazione per parti, calcolare i due integrali seguenti:

1. $\int x \cdot e^x dx$, 2. $\int x^2 \cdot \log x dx$.

- 7) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (x+1) \cdot \log(1-x)$; determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto $x_0 = 0$.

- 8) (7 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione

$$f(x, y) = 5x - 8y - x^2 - y^2.$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.