Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

6 ottobre 2022

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicando con s la proposizione $(p \Rightarrow q)\, e\, (q \Rightarrow r)$ e con t la proposizione $((p \Rightarrow q)\, e\, (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	s	$p \Rightarrow r$	t
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Come si evince dall'ultima colonna della tavola di verità, la proposizione proposta è una tautologia.

2) Per determinare il Campo di Esistenza della funzione dobbiamo imporre $\dfrac{x^2-4}{x^2-9} \geq 0$. Studiamo separatamente numeratore e denominatore:

N: $x^2-4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4$ che è verificata per $x \leq -2 \vee x \geq 2$;

D: $x^2-9 > 0 \Rightarrow x^2 > 9$ che è verificata per $x < -3 \vee x > 3$.

Dalle soluzioni per il numeratore ed il denominatore si ottiene che il rapporto $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ è non negativo se $x < -3 \vee -2 \leq x \leq 2 \vee x > 3$;

$C.E. =]-\infty, -3[\cup [-2, 2] \cup]3, +\infty[$.

Per la ricerca di eventuali asintoti abbiamo:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-9}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}} = \sqrt{\frac{(\to 1)}{(\to 1)}} = 1.$$

Asintoto orizzontale di equazione $y = 1$.

$$\lim_{x \to \pm 3} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{(\to 5)}{(\to 0^+)}} = +\infty.$$ Asintoti verticali di equazioni $x = \pm 3$.

$$\lim_{x \to \pm 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{(\to 0^-)}{(\to -5)}} = 0.$$ I punti $(\pm 2, 0)$ sono punti di stop della funzione.

3) $\lim_{x \to 0} 4-6x = 4$. Per la verifica posto $\left|(4-6x)-4\right| = \left|6x\right| = 6\left|x\right| < \epsilon$ si ottiene $\left|x\right| < \dfrac{\epsilon}{6}$. Limite verificato con $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{6}$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen(3\,x) - sen\,x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{sen(3\,x)}{3x} - \frac{sen\,x}{x} = 3 \cdot (\to 1) - (\to 1) = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = (\to e)^2 = e^2.$$

5) La funzione non presenta condizioni particolare per la determinazione del suo campo d'esistenza, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = (1-(-x)) \cdot e^{-x} = (1+x) \cdot e^{-x}$. Il risultato finale è diverso sia da $y(x)$ che da $-y(x)$; funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $(1-x) \cdot e^x \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 0$ in quanto e^x è quantità positiva, ma $1-x \geq 0$ se e solo se $x \leq 1$. Funzione positiva in $]-\infty, 1[$, negativa in $]1, +\infty[$; unica intersezione con l'asse delle ascisse in $A(1,0)$; $y(0) = 1$.

$\lim_{x \to -\infty} (1-x) \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} = 0$, in quanto per $x \to -\infty$, $1-x = o(e^{-x})$. $AsOrSx$ di equazione $y = 0$.

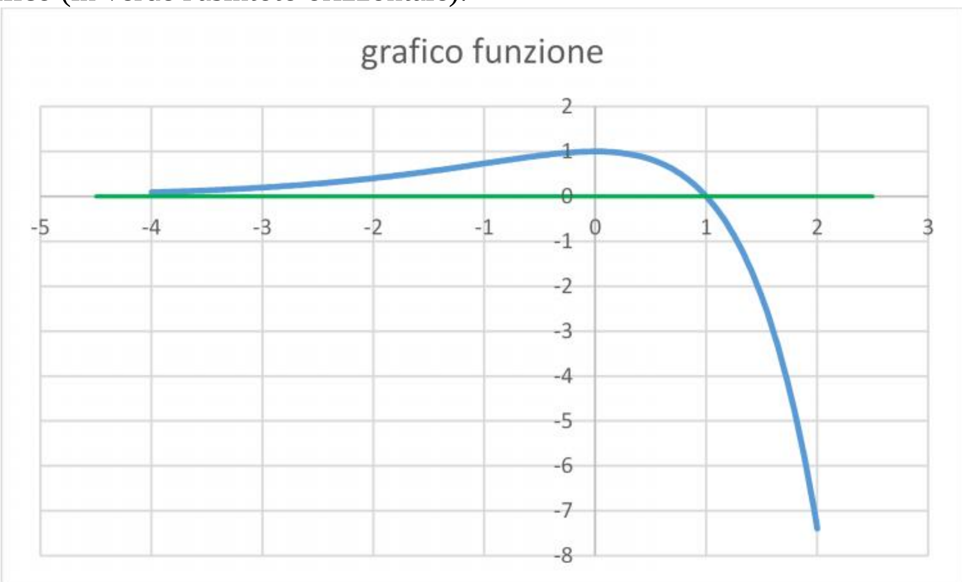
$\lim_{x \to +\infty} (1-x) \cdot e^x = (\to -\infty) \cdot (\to +\infty) = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x) \cdot e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot e^x =$ $(\to -1) \cdot (\to +\infty) = -\infty$. A destra la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -1 \cdot e^x + (1-x) \cdot e^x = -x \cdot e^x$. Dato che $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $y' \geq 0$ se e solo se $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 0]$, strettamente decrescente in $[0, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $x = 0$.

Concavità e convessità: $y'' = -1 \cdot e^x - x \cdot e^x = -(1+x)e^x$. $y'' \geq 0$ se e solo se $-(1+x) \geq 0 \Rightarrow 1+x \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, -1]$, strettamente concava in $[-1, +\infty[$; unico punto di flesso in $F(-1, 2/e)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) 1. Consideriamo $y = e^x$ come fattore differenziale e $y = 2x$ come fattore finito, risulta:

$$\int 2x \cdot e^x \, dx = e^x \cdot 2x - \int e^x \cdot 2 \, dx = e^x \cdot 2x - e^x \cdot 2 + c = 2e^x \cdot (x-1) + c.$$

2. Consideriamo adesso $y = cos\, x$ come fattore differenziale e $y = x$ come fattore finito, risulta:

$$\int x \cdot cos\, x \, dx = sen\, x \cdot x - \int sen\, x \cdot 1 \, dx = x \cdot sen\, x + cos\, x + c.$$

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mk+1 & mk+1 \\ k+m & k+m \end{bmatrix}$; posto $\begin{bmatrix} mk+1 & mk+1 \\ k+m & k+m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ si ottiene il sistema di condizioni: $\begin{cases} mk+1=1 \\ k+m=1 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} mk=0 \\ k+m=1 \end{cases}$, da cui facilmente $m=0$ e $k=1$ oppure $m=1$ e $k=0$.

8) $$f'_x = \frac{2x}{y^2}\,; \qquad f'_y = -\,\frac{(x^2-z^3)\cdot 2\cancel{y}}{y^{\cancel{4}\,3}} = -\,\frac{2(x^2-z^3)}{y^3}\,; \qquad f'_z = -\,\frac{3z^2}{y^2}\,.$$