Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)
27 giugno 2022

Compito Unico

1) L'insieme $B \subset A$, quindi $A \cup B = A$; per gli altri due insiemi risulta: $A \cap \mathcal{C}(B) = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le 4 \vee 7 \le x \le 10\} = [0,4] \cup [7,10]$ e $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A) \cup B) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) \cap \mathcal{C}(B) = A \cap \mathcal{C}(B)$.

2) La funzione proposta è sicuramente continua in tutti i numeri reali diversi da -2 e 2, per la continuità di f in -2 deve risultare $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$ ovvero $\lim_{x \to -2^-} ax = -2a = \lim_{x \to -2^+} log(3+x) = 0$, quindi $a = 0$. Per la continuità di f in 2 deve risultare $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ ovvero

$\lim_{x \to 2^-} log(3+x) = log\,5 = \lim_{x \to 2^+} bx = 2b$, da cui $b = \dfrac{1}{2} log\,5 = log\sqrt{5}$.

3) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$. Per la verifica posto $\left|\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - 1\right| = \dfrac{1}{x^2} < \epsilon$ si ottiene $\dfrac{1}{\epsilon} < x^2$ da cui $\sqrt{\dfrac{1}{\epsilon}} < x$. Limite verificato con $\delta_\epsilon = \sqrt{\dfrac{1}{\epsilon}}$.

4) Per il primo limite passiamo alla razionalizzazione del numeratore:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = \frac{(\to 0)}{(\to 2)} = 0$$

. Per il secondo limite abbiamo che per x divergente a $+\infty$, $x^2 = o(3^x)$, $sen\,x = o(3^x)$ e $x^3 - 2 = o(2^x)$; pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + x^2 + sen\,x}{2^x + x^3 - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty.$$

5) $C.E.$: $1 + x^2 \ne 0 \Rightarrow x^2 \ne -1$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$. $C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{1+x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi), la studiamo solo nel semiasse positivo delle ascisse ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \ge 0$ se $\dfrac{x^3}{1+x^2} \ge 0 \Rightarrow$ $x^3 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$. Funzione positiva nel semiasse positivo delle ascisse. $y = 0$ se $\dfrac{x^3}{1+x^2} = 0$ che è soddisfatta solo nel punto $x = 0$ ($y(0) = 0$), unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{(\to +\infty)}{(\to 1)} = +\infty$.

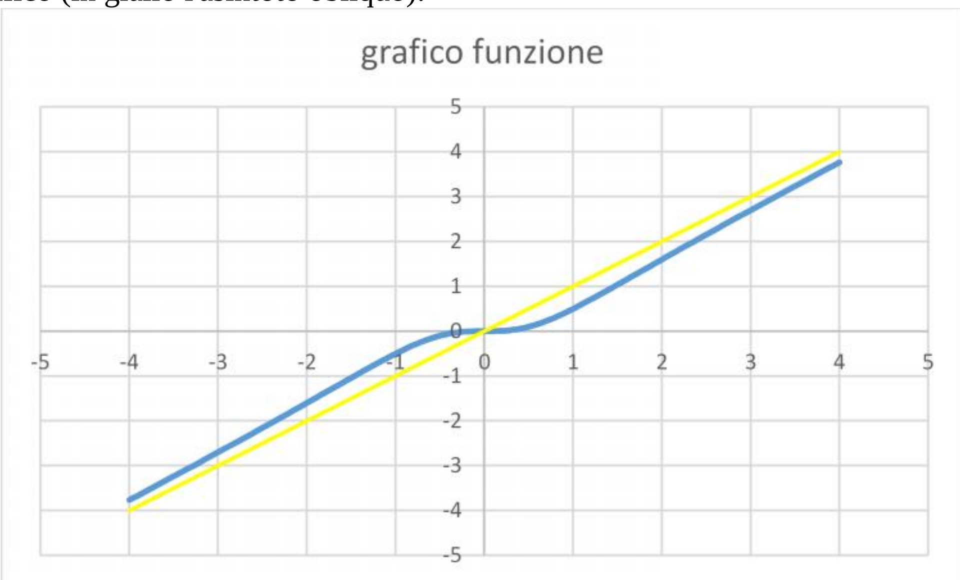
$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(1+x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{(\to 1)} = 1$.

$\lim_{x \to +\infty} y - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{1+x^2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+x\right)} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\frac{1}{x}+x} = -\frac{1}{(\to +\infty)} = 0$. La funzione presenta asintoto obliquo dx di equazione $y = x$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2 + x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$. $y' \geq 0 \; \forall x \geq 0$. Funzione monotona crescente, $y'(0) = 0$ quindi l'origine degli assi è un punto a tangente orizzontale per il grafico della funzione.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{(6x+4x^3)(1+x^2)^2 - (3x^2+x^4)2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{(6x+4x^3)(1+x^2) - 4(3x^2+x^4)\cdot x}{(1+x^2)^3} = \frac{6x - 2x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$. $y'' \geq 0$, se $3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Funzione strettamente convessa in $\left[0, \sqrt{3}\right]$, strettamente concava in $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$; flessi per $x = 0$ e per $x = \sqrt{3}$, $y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$. Punti di flesso $O(0,0)$ e $F\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

Grafico (in giallo l'asintoto obliquo):



.

6) $\int_0^2 (x + e^x - 1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^x - x\right)_0^2 = \left(2 + e^2 - 2\right) - 1 = e^2 - 1$.

7) Tramite la formula del differenziale, la funzione $f(x)$ può essere approssimata nel punto $x_0 + h$ come: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. Nel caso specifico $f(x_0) = f(16) = \sqrt[4]{16} = 2,\ f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ con $f'(16) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{32}$ ed infine $\sqrt[4]{16,32} = \sqrt[4]{16 + 0,32} \approx\ 2 + \dfrac{1}{32} \cdot 0,32\ = 2,1.$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0$, $\nabla z = (2xy + y - 4\,x, x^2 + x)$, $\nabla z(P) = (\,-1, 2)$. Equazione del piano tangente: $z =\ -1(x-1) + 2(y-1)$, oppure $x - 2y + z + 1 = 0$.