Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

7 novembre 2022

Compito A1

1)

p	q	$q\ e\ p$	$p \Rightarrow q$	$non(q\ e\ p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow non(q\ e\ p)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

.

2) $f(g(x)) = f(4^x) = 2 - (4^x)^3 = 2 - 4^{3x}$. Per ottenere l'inversa di questa funzione poniamo $y = 2 - 4^{3x}$, da cui $4^{3x} = 2 - y$ che equivale a $3x = log_4(2-y)$, ed in conclusione $x = \frac{1}{3}log_4(2-y)$. Espressione della funzione inversa $y = \frac{1}{3}log_4(2-x) = log_4\sqrt[3]{2-x}$.

3) $B = \{x \in \mathbb{R}: x > 10\} =]10, +\infty[$; $A \cup B = [-5, 8] \cup]10, +\infty[$; $\delta(A \cup B) = \{-5, 8, 10\}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\, x} - 1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{sen\, x} - 1}{sen\, x} \cdot \frac{sen\, x}{x} = \frac{1}{3} \cdot (\to 1) \cdot (\to 1) = \frac{1}{3}$;
$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+10x)}{x} = \lim_{x \to 0} 10 \cdot \frac{log(1+10x)}{10x} = 10 \cdot (\to 1) = 10$.

5) $\lim_{x \to 2} 3 + 2x = 7$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, risulta $|(3+2x) - 7| = |2x - 4| = 2|x-2|$, posto $2|x-2| < \epsilon$ si ha $|x - 2| < \epsilon/2$, da cui $\delta_\epsilon = \epsilon/2$, limite verificato.

Compito A2

1)

p	q	$q\ o\ p$	$p \Leftrightarrow q$	$non(q\ o\ p)$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow non(q\ o\ p)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

.

2) $f(g(x)) = f(1 + x^3) = log(2(1+x^3)) = log(2 + 2x^3)$. Per ottenere l'inversa di questa funzione poniamo $y = log(2+2x^3)$, da cui $2 + 2x^3 = e^y$ che equivale a $x^3 = \frac{1}{2}e^y - 1$, ed in conclusione $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}e^y - 1}$. Espressione della funzione inversa $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}e^x - 1}$.

3) $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 5\} =]-\infty, 5]$; $A \cup B =]-\infty, 18]$; $\delta(A \cup B) = \{18\}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{sen(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{sen(5x)}{5x}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(\to 1)}{(\to 1)} = \frac{1}{5}$;
$\lim_{x \to 0} \frac{log(1-x)}{4x} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{4} \cdot \frac{log(1-x)}{-x} = -\frac{1}{4} \cdot (\to 1) = -\frac{1}{4}$.

5) $\lim_{x \to 3} 1 - 3x = -8$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, risulta $|(1-3x) - (-8)| = |9 - 3x| = 3|3 - x| = 3|x-3|$, posto $3|x-3| < \epsilon$ si ha $|x-3| < \epsilon/3$, da cui $\delta_\epsilon = \epsilon/3$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}1$

1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Dalla tavola di verità sopra costruita è facile notare che la seconda proposizione è una tautologia, mentre per la prima proposizione abbiamo né una tautologia né una contraddizione.

2) $g(f(x) - x \cdot g(x)) = g(2x + x^2 - x \cdot (1 - \sqrt{x})) = g(x^2 + x + x\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x^2 + x + x\sqrt{x}}.$

3) $A \cup B =]-2, 2[\cup]0, 1[\cup [5, 10] =]-2, 2[\cup [5, 10]$;
$(A \overset{\circ}{\cup} B) =]-2, 2[\cup]5, 10[$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1 - e^x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} - \dfrac{sen(1 - e^x)}{1 - e^x} \cdot \dfrac{e^x - 1}{x} = -(\to 1) \cdot (\to 1) = -1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + x^3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + x^3)}{x^3} \cdot x^2 = (\to 1) \cdot (\to 0) = 0.$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{3} + 3x = \dfrac{19}{3}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, risulta $\left| \left(\dfrac{1}{3} + 3x \right) - \dfrac{19}{3} \right| = |3x - 6| = 3|x - 2|$, posto $3|x - 2| < \epsilon$ si ha $|x - 2| < \epsilon/3$, da cui $\delta_\epsilon = \epsilon/3$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}2$

1)

p	q	$p\ o\ q$	$p\ e\ q$	$(p\ o\ q) \Rightarrow (p\ e\ q)$	$(p\ e\ q) \Rightarrow (p\ o\ q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Dalla tavola di verità sopra costruita è facile notare che la seconda proposizione è una tautologia, mentre per la prima proposizione abbiamo né una tautologia né una contraddizione.

2) $g(x \cdot g(x) - f(x)) = g(x \cdot (1 + \sqrt{x}) - (2x - x^2)) = g(x^2 - x + x\sqrt{x}) = 1 + \sqrt{x^2 - x + x\sqrt{x}}.$

3) $A \cup B =]-6, 6[\cup]0, 3[\cup [5, 10] =]-6, 10]$; $(A \overset{\circ}{\cup} B) =]-6, 10[$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x - x^2)}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{sen(x - x^2)}{x - x^2} \cdot (1 - x) = \dfrac{1}{4} \cdot (\to 1) \cdot (\to 1) = \dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-3x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} -3 \cdot \dfrac{e^{-3x} - 1}{-3x} = -3 \cdot (\to 1) = -3.$

5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{5} - 2x = -\dfrac{29}{5}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, risulta $\left| \left(\dfrac{1}{5} - 2x \right) - \left(-\dfrac{29}{5} \right) \right| = |-2x + 6| = 2|-x + 3| = 2|x - 3|$, posto $2|x - 3| < \epsilon$ si ha $|x - 3| < \epsilon/2$, da cui $\delta_\epsilon = \epsilon/2$, limite verificato.

Compito $\mathbb{C}1$

1)

p	q	$p\ o\ q$	$non(p\ o\ q)$	$p \Leftrightarrow q$	$non(p\ o\ q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

.

2) Da $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, si ottiene facilmente $g(x) = x^3$. $f(g(x)) = f(x^3) = 2^{1-x^3}$;
$g(f(x)) = g(2^{1-x}) = (2^{1-x})^3 = 2^{3(1-x)} = 2^{3-3x} = 8^{1-x}$.

3) $A \cup B =]-2, 2[\cup \{4\} \cup \{6\} \cup]0, 5[=]-2, 5[\cup \{6\}$; $\delta(A \cup B) = \{-2, 5, 6\}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-cosx} - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-cosx} - 1}{1 - cosx} \cdot \dfrac{1 - cosx}{x^2} = (\to 1) \cdot \left(\to \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$.

5) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{3}(2 + 3x) = -\dfrac{4}{3}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, risulta $\left|\dfrac{1}{3}(2+3x) - \left(-\dfrac{4}{3}\right)\right| =$
$|x + 2|$, posto $|x + 2| < \epsilon$ si ottiene $\delta_\epsilon = \epsilon$, limite verificato.

Compito $\mathbb{C}2$

1)

p	q	$p\ e\ q$	$non(p\ e\ q)$	$p \Rightarrow q$	$non(p\ e\ q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

.

2) Da $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$, si ottiene facilmente $g(x) = x^5$. $f(g(x)) = f(x^5) = 3^{1+x^5}$;
$g(f(x)) = g(3^{1+x}) = (3^{1+x})^5 = 3^{5(1+x)} = 3^{5+5x} = 243^{1+x}$.

3) $A \cup B =]0, 5[\cup \{4\} \cup \{6\} \cup]0, 3[=]0, 5[\cup \{6\}$; $\delta(A \cup B) = \{0, 5, 6\}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{1 - cosx} = \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}{\frac{1-cosx}{x^2}} = -\dfrac{(\to 1)}{(\to \frac{1}{2})} = -2$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x = e^3$.

5) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{2}(6 - x) = 1$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, risulta $\left|\dfrac{1}{2}(6-x) - 1\right| = \left|2 - \dfrac{1}{2}x\right| =$
$\left|\dfrac{1}{2}x - 2\right| = \dfrac{1}{2}|x - 4|$, posto $\dfrac{1}{2}|x - 4| < \epsilon$ si ha $|x - 4| < 2\epsilon$, da cui $\delta_\epsilon = 2\epsilon$,
limite verificato.