# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

9 gennaio 2023

Compito $\mathbb{G}1$

1) (6 punti) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\ e\ (p \Leftrightarrow q))$.

1)

| $p$ | $q$ | $\neg(p\ o\ q)$ | $p \Leftrightarrow q$ | $q\ e\ (p \Leftrightarrow q)$ | $\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\ e\ (p \Leftrightarrow q))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |

2) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \dfrac{2+x}{x}$ e $g(x) = x^2$; risolvere la disequazione $g(f(x)) \geq 2 + f(g(x))$.

2) $g(f(x)) = g\left(\dfrac{2+x}{x}\right) = \left(\dfrac{2+x}{x}\right)^2$; $f(g(x)) = f\left(x^2\right) = \dfrac{2+x^2}{x^2}$. Per la disequazione risulta: $\left(\dfrac{2+x}{x}\right)^2 \geq 2 + \dfrac{2+x^2}{x^2}$ che dopo alcuni passaggi algebrici può essere riscritta come $\dfrac{2+4x-2x^2}{x^2} \geq 0$ da cui $\dfrac{x^2-2x-1}{x^2} \leq 0$. Posto $x \neq 0$, studiamo solo il numeratore: $x^2-2x-1 \leq 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 > 0$, radici associate $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, soluzioni interne. La disequazione è verificata per $1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ con $x \neq 0$, ovvero $1-\sqrt{2} \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 1+\sqrt{2}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f$ di dominio l'intervallo $[-3,3]$ e

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ b & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

. Determinare i valori di $a$ e $b$ che rendono la funzione continua nel suo dominio e disegnare il grafico della funzione.

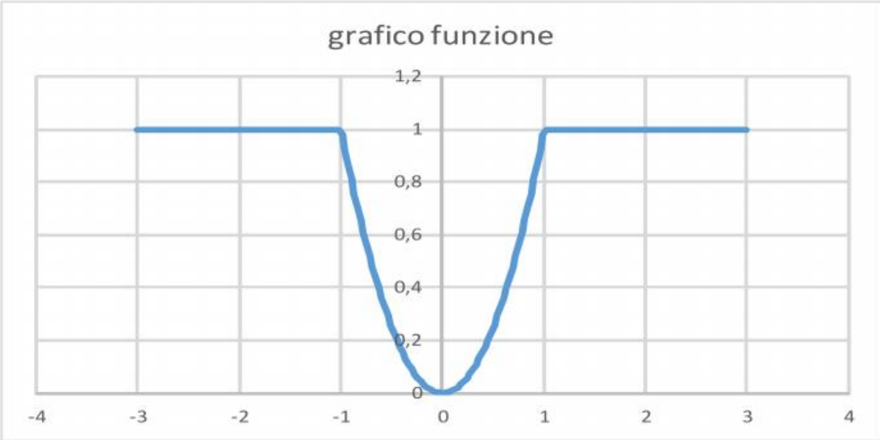
3) La funzione risulta continua nel suo dominio se $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Passiamo al calcolo dei limiti:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} a = a$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1$, quindi $a = 1$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} b = b$, quindi $b = 1$.

*NOTA*: $\forall x \in [-1,1]$, $f(-x) = f(x)$, funzione pari in $[-1,1]$; quindi condizione necessaria affinché la funzione sia continua è $a = b$, di conseguenza per determinare i valori richiesti è sufficiente calcolare ed eguagliare solo i primi due limiti.

Grafico:




.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x) - tg^2 x}{x}$ ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3 \log x}{\log x}$ .

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x) - tg^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{3x} \cdot 3 - \frac{tg^2 x}{x^2} \cdot x =$
$(\to 1) \cdot 3 - (\to 1) \cdot (\to 0) = 3.$

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $\log x = o(x)$, quindi
$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3 \log x}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - o(x)}{o(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{o(x)} = +\infty.$

Il secondo limite può essere risolto anche tramite il Teorema di De L'Hôpital, infatti
$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3 \log x}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{2 - (\to 0^+)}{(\to 0^+)} = +\infty.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione
$y = e^{2 - \frac{1}{x^2}}$ .

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

$y(-x) = e^{2 - \frac{1}{(-x)^2}} = e^{2 - \frac{1}{x^2}} = y(x)$ . Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in ]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x > 0$ in quanto funzione esponenziale. Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0} e^{2 - \frac{1}{x^2}} = e^{(\to -\infty)} = 0$; il punto $O(0,0)$ è punto di discontinuità di terza specie.

$\lim_{x \to +\infty} e^{2 - \frac{1}{x^2}} = e^{2 - (\to 0)} = e^2$; $AOr$ di equazione $y = e^2$.

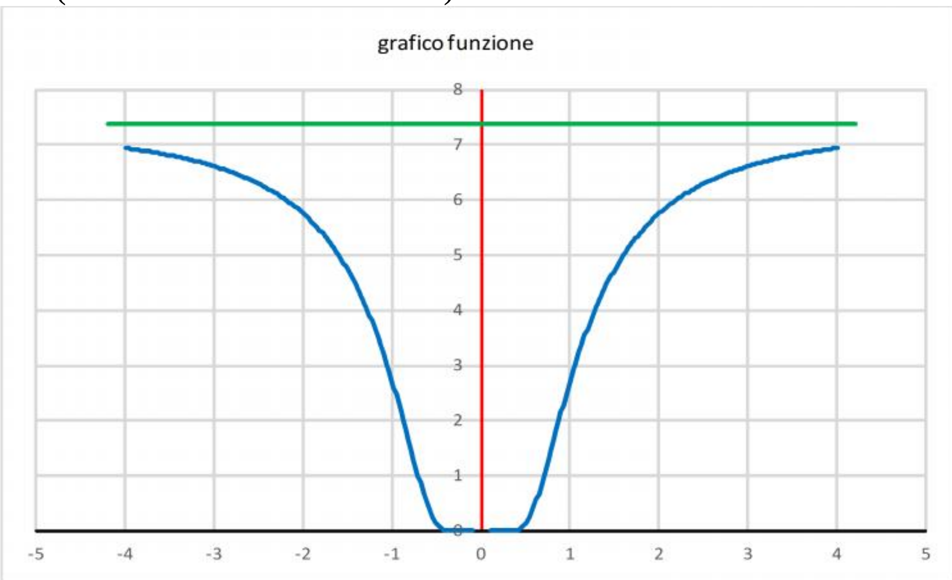
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{2 - \frac{1}{x^2}} \cdot \left( \frac{2}{x^3} \right) = \frac{2\, e^{2 - \frac{1}{x^2}}}{x^3}$ . $y' > 0$, $\forall x \in ]0, +\infty[$.

Funzione strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{2\, e^{2 - \frac{1}{x^2}} \cdot \left( \frac{2}{\cancel{x^3}} \right) \cdot \cancel{x^3} - 2\, e^{2 - \frac{1}{x^2}} \cdot 3x^2}{x^6} =$

$\dfrac{2\,e^{2-\frac{1}{x^2}}(2-3x^2)}{x^6}$. $y''>0,$ se $2-3x^2>0 \Rightarrow\ x^2<\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow\ x<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Funzione strettamente convessa in $\left]0,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$, strettamente concava in $\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}},+\infty\right[$. Punto di flesso $F\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{e}\right)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):




.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^4\left(\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^4\left(\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}\right)dx\ =\ \int_1^4\left(x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\ =$$
$$\int_1^4\left(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx\ =\ \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}-2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)_1^4\ =$$
$$\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}\right)_1^4\ =\ \left(\frac{64}{5}-\frac{32}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+2\right)\ =$$
$$\frac{92}{15}-\frac{16}{15}\ =\ \frac{76}{15}.$$

*Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione*: posto $\sqrt{x}=t$, si ottiene $x=t^2$ da cui $dx=2t\,dt$, quindi:

$$\int_1^4\left(\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}\right)dx\ =\ \int_1^2\left(\frac{t^4-2t^2+1}{\cancel{t}}\right)2\cancel{t}\,dt\ =\ \int_1^2\left(2t^4-4t^2+2\right)dt\ =$$
$$\left(\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+2t\right)_1^2\ =\ \left(\frac{64}{5}-\frac{32}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+2\right)\ =\ \frac{92}{15}-\frac{16}{15}\ =\ \frac{76}{15}.$$

7) (7 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione $f(x)=xe^{x^2}+x-3$.

7) Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2$. Nel nostro caso $f(x)=xe^{x^2}+x-3$,

$f(0) = -3$, $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} + 1$, $f'(0) = 2$, $f''(x) = 6xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2}$, $f''(0) = 0$. Quindi $P_2(x) = -3 + 2x$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x,\, y) = 3x^3 - 4x^2 - 2xy - 6y^2$.

8) $\nabla f = (9x^2 - 8x - 2y,\ -2x - 12y)$.

$$FOC\colon \begin{cases} 9x^2 - 8x - 2y = 0 \\ -2x - 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 324y^2 + 46y = 0 \\ x = -6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(162y + 23) = 0 \\ x = -6y \end{cases}$$

$$\nearrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\searrow \begin{cases} x = \dfrac{23}{27} \\ y = -\dfrac{23}{162} \end{cases}$$ , due punti critici $O(0,0)$ e $A\left(\dfrac{23}{27}, -\dfrac{23}{162}\right)$.

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 18x - 8 & -2 \\ -2 & -12 \end{bmatrix};\ |\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 18x - 8 & -2 \\ -2 & -12 \end{vmatrix} = 92 - 216x.$$

$SOC$: $|\mathcal{H}f(O)| = 92 > 0$, $f''_{y,y}(O) = -12 < 0$. $O$ punto di massimo relativo.

$|\mathcal{H}f(A)| = -92 < 0$. $A$ punto di sella.

# Compito $\mathbb{G}2$

1) (6 punti) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\ o\ q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow (p\ e\ q))$.

1)

| $p$ | $q$ | $p\ o\ q$ | $p\ e\ q$ | $\neg q \Rightarrow (p\ e\ q)$ | $(p\ o\ q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow (p\ e\ q))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |

2) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$ e $g(x) = x^2$; risolvere la disequazione $g(f(x)) < 6 - f(g(x))$.

2) $g(f(x)) = g\left(\dfrac{1+x}{x}\right) = \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2$; $f(g(x)) = f\left(x^2\right) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$. Per la disequazione risulta: $\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2 < 6 - \dfrac{1+x^2}{x^2}$ che dopo alcuni passaggi algebrici può essere riscritta come $\dfrac{2+2x-4x^2}{x^2} < 0$ da cui $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2} > 0$. Posto $x \neq 0$, studiamo solo il numeratore: $2x^2 - x - 1 > 0$, $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$, radici associate $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$, soluzioni esterne. La disequazione è verificata per $x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1$.

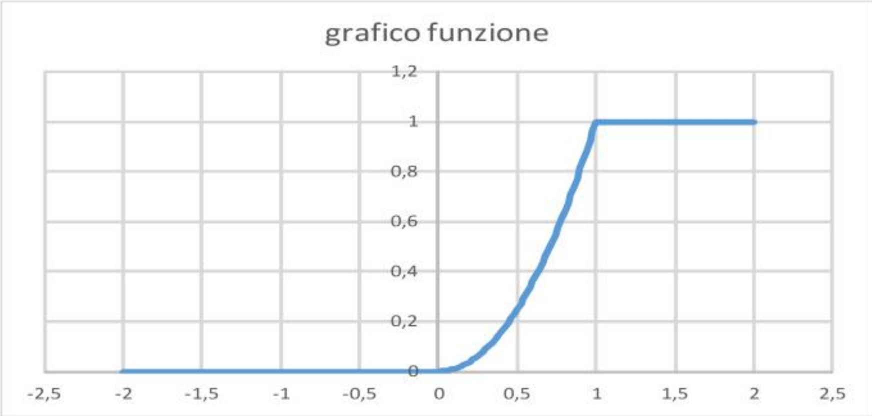
3) (6 punti) Sia data la funzione $f$ di dominio l'intervallo $[-2, 2]$ e $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ b & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$. Determinare i valori di $a$ e $b$ che rendono la funzione continua nel suo dominio e disegnare il grafico della funzione.

3) La funzione risulta continua nel suo dominio se $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$. Passiamo al calcolo dei limiti:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a = a$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$, quindi $a = 0$;

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} b = b$, quindi $b = 1$.

Grafico:



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x}$ ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x - 6 \log x}$ .

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x =$

$(\to 1) \cdot 2 + \left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot (\to 0) = 2.$

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $\log x = o(x)$, quindi

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x - 6 \log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x - o(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x} =$

$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1.$

Il secondo limite può essere risolto anche tramite il Teorema di De L'Hôpital, infatti

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x - 6 \log x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{6}{x}} = \frac{1}{1 - (\to 0^+)} = 1.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{3 + \frac{1}{x^2}}$ .

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

$y(-x) = e^{3 + \frac{1}{(-x)^2}} = e^{3 + \frac{1}{x^2}} = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in ]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x > 0$ in quanto funzione esponenziale. Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

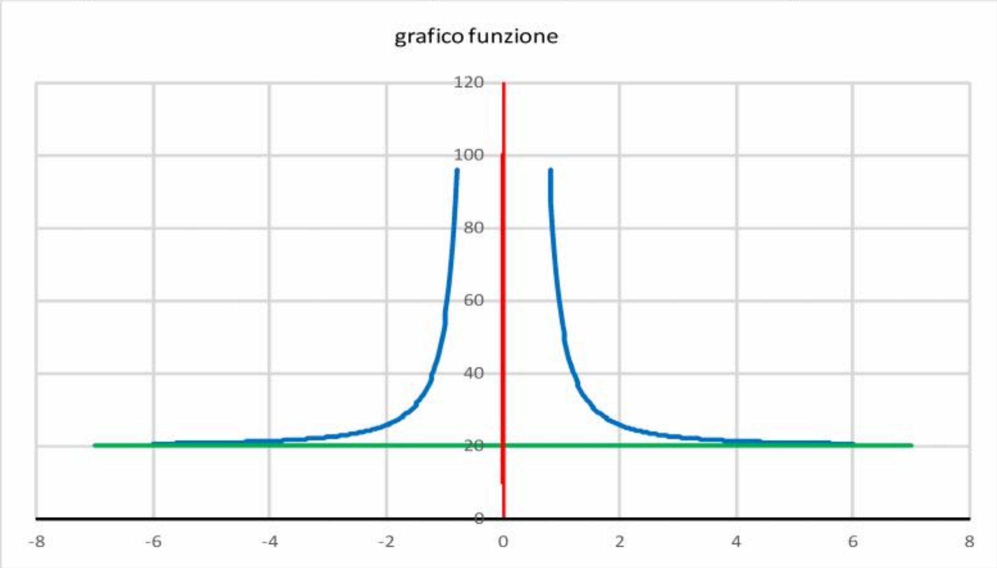
$\lim_{x \to 0} e^{3 + \frac{1}{x^2}} = e^{(\to +\infty)} = +\infty$; $AV$ di equazione $x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} e^{3 + \frac{1}{x^2}} = e^{3 + (\to 0)} = e^3$; $AOr$ di equazione $y = e^3$.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{3 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{2\, e^{3 + \frac{1}{x^2}}}{x^3}$. $y' < 0$, $\forall x \in ]0, +\infty[$. Funzione strettamente decrescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = -\dfrac{2\,e^{3+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{\cancel{x^3}}\right) \cdot \cancel{x^3} - 2\,e^{3+\frac{1}{x^2}} \cdot 3x^2}{x^6} =$ $\dfrac{2\,e^{3+\frac{1}{x^2}}\,(2+3x^2)}{x^6}$ . $y'' > 0,\ \forall x \in\, ]0,\,+\infty[$. Funzione strettamente convessa in $]0,\,+\infty[$, nessun punto di flesso.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale):




.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{x^3+x+2}{\sqrt{x}}\right) dx$ .

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^4 \left(\frac{x^3+x+2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^4 \left(x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx =$$
$$\int_1^4 \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7/2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)_1^4 =$$
$$\left(\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\right)_1^4 = \left(\frac{256}{7} + \frac{16}{3} + 8\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{3} + 4\right) =$$
$$\frac{1048}{21} - \frac{104}{21} = \frac{944}{21} .$$

*Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione*: posto $\sqrt{x} = t$, si ottiene $x = t^2$ da cui $dx = 2t\,dt$, quindi:

$$\int_1^4 \left(\frac{x^3+x+2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{t^6+t^2+2}{\cancel{t}}\right) 2\cancel{t}\,dt = \int_1^2 \left(2t^6+2t^2+4\right) dt =$$
$$\left(\frac{2}{7}t^7 + \frac{2}{3}t^3 + 4t\right)_1^2 = \left(\frac{256}{7} + \frac{16}{3} + 8\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{3} + 4\right) = \frac{1048}{21} - \frac{104}{21} =$$
$$\frac{944}{21} .$$

7) (7 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione $f(x) = sen\,x - cos(4x)$.

7) Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2$. Nel nostro caso $f(x) = sen\, x - cos(4x)$, $f(0) = -1$, $f'(x) = cos\, x + 4\, sen(4x)$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -sen\, x + 16\, cos(4x)$, $f''(0) = 16$. Quindi $P_2(x) = -1 + x + 8x^2$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 + 6x^2 - 9xy + 4y^2$.

8) $\nabla f = (3x^2 + 12x - 9y, -9x + 8y)$.

$$FOC: \begin{cases} 3x^2 + 12x - 9y = 0 \\ -9x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x^2 + 15x = 0 \\ y = \frac{9}{8}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(8x+5) = 0 \\ y = \frac{9}{8}x \end{cases}$$

$$\nearrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\searrow \begin{cases} x = -\frac{5}{8} \\ y = -\frac{45}{64} \end{cases}$$ , due punti critici $O(0,0)$ e $A\left(-\frac{5}{8}, -\frac{45}{64}\right)$.

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x+12 & -9 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}; \ |\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 6x+12 & -9 \\ -9 & 8 \end{vmatrix} = 48x + 15.$$

$SOC$: $|\mathcal{H}f(O)| = 15 > 0$, $f''_{y,y}(O) = 8 > 0$. $O$ punto di minimo relativo.

$|\mathcal{H}f(A)| = -15 < 0$. $A$ punto di sella.

## Compito $\mathbb{G}3$

1) (6 punti) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $((p \Rightarrow q)\ e\ (p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow \neg q$.

1)

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $(p \Rightarrow q)\ e\ (p \Leftrightarrow q)$ | $((p \Rightarrow q)\ e\ (p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

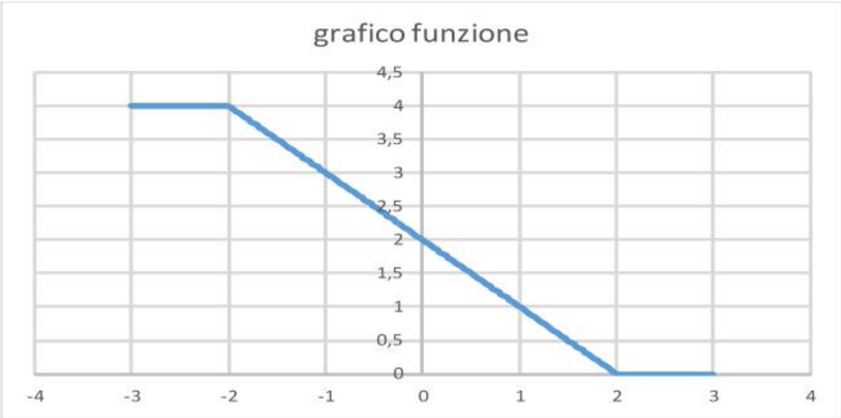
.

2) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \frac{1-x}{x}$ e $g(x) = x^2$; risolvere la disequazione $g(f(x)) \geq 1 + f(g(x))$.

2) $g(f(x)) = g\left(\frac{1-x}{x}\right) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$; $f(g(x)) = f\left(x^2\right) = \frac{1-x^2}{x^2}$. Per la disequazione risulta: $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \geq 1 + \frac{1-x^2}{x^2}$ che dopo alcuni passaggi algebrici può essere riscritta come $\frac{x^2-2x}{x^2} \geq 0$. Posto $x \neq 0$, studiamo solo il numeratore: $x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0$, con soluzioni esterne $x \leq 0 \vee x \geq 2$. La disequazione è verificata per $x \leq 0 \vee x \geq 2$ con $x \neq 0$, ovvero $x < 0 \vee x \geq 2$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f$ di dominio l'intervallo $[-3, 3]$ e $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } -3 \leq x < -2 \\ 2 - x & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ b & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$. Determinare i valori di $a$ e $b$ che rendono la funzione continua nel suo dominio e disegnare il grafico della funzione.

3) La funzione risulta continua nel suo dominio se $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$. Passiamo al calcolo dei limiti:
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} a = a$ e $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 2 - x = 4$, quindi $a = 4$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2 - x = 0$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} b = b$, quindi $b = 0$.
Grafico:



.

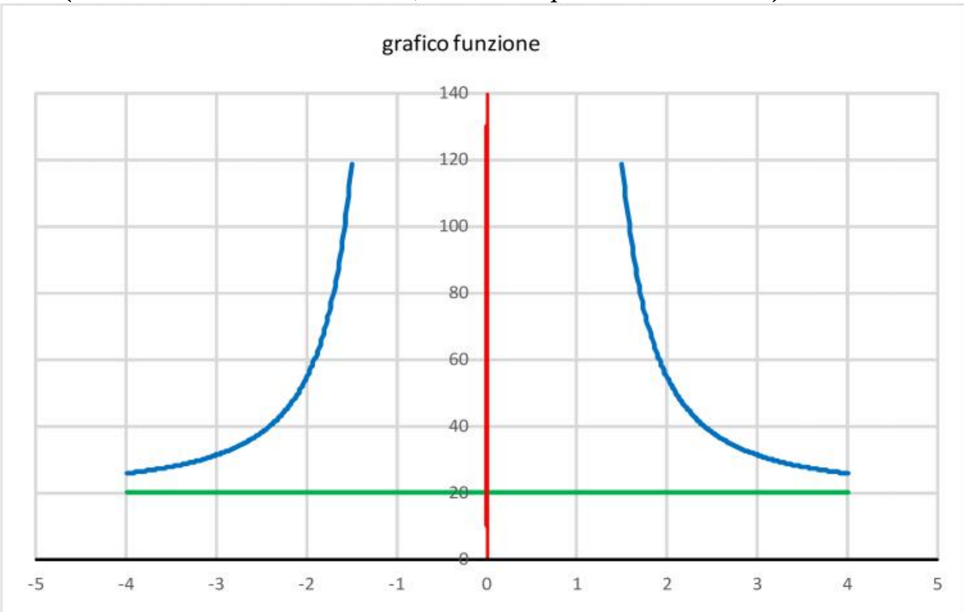
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{senx^2 - tg^2\, x}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\log x - x}{2 + \log x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{senx^2 - tg^2\, x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{senx^2}{x^2} \cdot x - \frac{tg^2\, x}{x^2} \cdot x =$
$(\to 1) \cdot (\to 0) - (\to 1) \cdot (\to 0) = 0.$
Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $\log x = o(x)$, quindi
$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\log x - x}{2 + \log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{o(x) - x}{2 + o(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{2 + o(x)} = -\infty.$
Il secondo limite può essere risolto anche tramite il Teorema di De L'Hôpital, infatti
$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\log x - x}{2 + \log x} \overset{\underline{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{(\to 0^+) - 1}{(\to 0^+)} = -\infty.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{3 + \frac{4}{x^2}}$.

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.
$y(-x) = e^{3 + \frac{4}{(-x)^2}} = e^{3 + \frac{4}{x^2}} = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in ]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x > 0$ in quanto funzione esponenziale. Nessuna intersezione con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 0} e^{3 + \frac{4}{x^2}} = e^{(\to +\infty)} = +\infty$; $AV$ di equazione $x = 0$.
$\lim_{x \to +\infty} e^{3 + \frac{4}{x^2}} = e^{3 + (\to 0)} = e^3$; $AOr$ di equazione $y = e^3$.
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{3 + \frac{4}{x^2}} \cdot \left(-\frac{8}{x^3}\right) = -\frac{8\, e^{3 + \frac{4}{x^2}}}{x^3}$. $y' < 0$, $\forall x \in ]0, +\infty[$. Funzione strettamente decrescente in $]0, +\infty[$.
Concavità e convessità: $y'' = -\frac{8\, e^{3 + \frac{4}{x^2}} \cdot \left(-\frac{8}{\cancel{x^3}}\right) \cdot \cancel{x^3} - 8\, e^{3 + \frac{4}{x^2}} \cdot 3x^2}{x^6} =$

$\dfrac{8\,e^{3+\frac{4}{x^2}}(8+3x^2)}{x^6}$. $y''>0,\ \forall x\in\,]0,\,+\infty[$. Funzione strettamente convessa in $]0,\,+\infty[$, nessun punto di flesso.
Grafico (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^9\left(\frac{5-x^2}{3\sqrt{x}}\right)dx$ .

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^9\left(\frac{5-x^2}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9\left(\frac{5}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{3}x\sqrt{x}\right)dx = \int_1^9\left(\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$
$$\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}\right)_1^9 = \left(\frac{10}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{15}x^2\sqrt{x}\right)_1^9 =$$
$$\left(10-\frac{162}{5}\right)-\left(\frac{10}{3}-\frac{2}{15}\right) = -\frac{112}{5}-\frac{16}{5} = -\frac{128}{5}.$$

*Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione*: posto $\sqrt{x}=t$, si ottiene $x=t^2$ da cui $dx=2t\,dt$, quindi:

$$\int_1^9\left(\frac{5-x^2}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^3\left(\frac{5-t^4}{3\cancel{t}}\right)2\cancel{t}\,dt = \int_1^3\left(\frac{10}{3}-\frac{2}{3}t^4\right)dt =$$
$$\left(\frac{10}{3}t-\frac{2}{15}t^5\right)_1^3 = \left(10-\frac{162}{5}\right)-\left(\frac{10}{3}-\frac{2}{15}\right) = -\frac{112}{5}-\frac{16}{5} = -\frac{128}{5}.$$

7) (7 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione $f(x)=e^{-x}+cos(3x)$.

7) Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2$. Nel nostro caso $f(x)=e^{-x}+cos(3x)$, $f(0)=2$, $f'(x)=-e^{-x}-3\,sen(3x)$, $f'(0)=-1$, $f''(x)=e^{-x}-9\,cos(3x)$, $f''(0)=-8$. Quindi $P_2(x)=2-x-4x^2$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x,\,y)=2x^3+6x^2-2xy+3y^2$.

8) $\nabla f=(6x^2+12x-2y,\,-2x+6y)$.

$FOC$: $\begin{cases} 6x^2 + 12x - 2y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 54y^2 + 34y = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(27y + 17) = 0 \\ x = 3y \end{cases}$

$\nearrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\searrow \begin{cases} x = -\dfrac{17}{9} \\ y = -\dfrac{17}{27} \end{cases}$ , due punti critici $O(0,0)$ e $A\left(-\dfrac{17}{9}, -\dfrac{17}{27}\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 12x + 12 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 12x + 12 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 72x + 68.$

$SOC$: $|\mathcal{H}f(O)| = 68 > 0$, $f''_{y,y}(O) = 6 > 0$. $O$ punto di minimo relativo.

$|\mathcal{H}f(A)| = -68 < 0$. $A$ punto di sella.

## Compito $\mathbb{G}4$

1) (6 punti) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $q \Leftrightarrow ((\neg p \; o \; q) \Rightarrow \neg q)$.

1)

| $p$ | $q$ | $\neg p \; o \; q$ | $\neg q$ | $(\neg p \; o \; q) \Rightarrow \neg q$ | $q \Leftrightarrow ((\neg p \; o \; q) \Rightarrow \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |

.

2) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ e $g(x) = x^2$; risolvere la disequazione $f(g(x)) \geq g(f(x))$.

2) $f(g(x)) = f(x^2) = \dfrac{1-x^2}{x^2}$; $g(f(x)) = g\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$. Per la disequazione risulta: $\dfrac{1-x^2}{x^2} \geq \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$ che dopo alcuni passaggi algebrici può essere riscritta come $\dfrac{2x-2x^2}{x^2} \geq 0$. Posto $x \neq 0$, studiamo solo il numeratore: $2x - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x(1-x) \geq 0$, con soluzioni interne $0 \leq x \leq 1$. La disequazione è verificata per $0 \leq x \leq 1$ con $x \neq 0$, ovvero $0 < x \leq 1$.

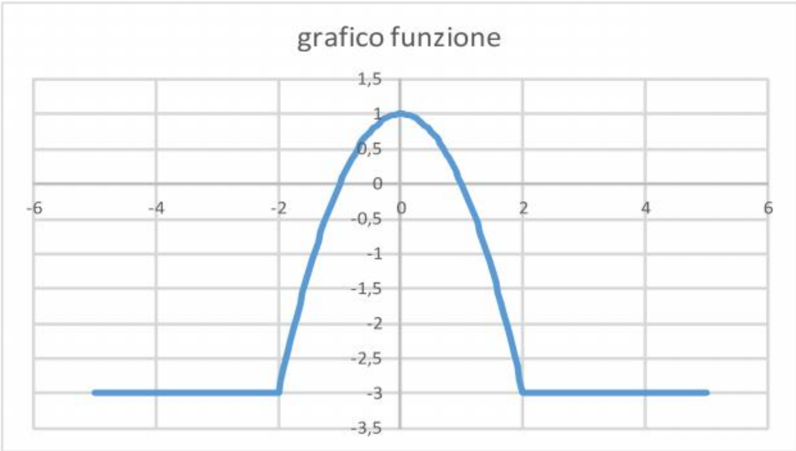
3) (6 punti) Sia data la funzione $f$ di dominio l'intervallo $[-5, 5]$ e $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ 1 - x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ b & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$. Determinare i valori di $a$ e $b$ che rendono la funzione continua nel suo dominio e disegnare il grafico della funzione.

3) La funzione risulta continua nel suo dominio se $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Passiamo al calcolo dei limiti:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} a = a$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} 1 - x^2 = -3$, quindi $a = -3$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 1 - x^2 = -3$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} b = b$, quindi $b = -3$.

*NOTA*: $\forall x \in [-2,2],\ f(-x) = f(x)$, funzione pari in $[-2,2]$; quindi condizione necessaria affinché la funzione sia continua è $a = b$, di conseguenza per determinare i valori richiesti è sufficiente calcolare ed eguagliare solo i primi due limiti.
Grafico:



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - sen\, x - cos\, x}{x}$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\, x}{6x + log\, x}$ .

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - sen\, x - cos\, x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\, x}{x} - \dfrac{sen\, x}{x} = (\to 0) - (\to 1) = -1.$

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $log\, x = o(x)$, quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log\, x}{6x + log\, x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{o(x)}{6x + o(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{o(x)}{6x} = 0.$$

Il secondo limite può essere risolto anche tramite il Teorema di De L'Hôpital, infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log\, x}{6x + log\, x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{6 + \frac{1}{x}} = \frac{(\to 0^+)}{6 + (\to 0^+)} = 0.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{1 - \frac{2}{x^2}}$ .

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

$y(-x) = e^{1 - \frac{2}{(-x)^2}} = e^{1 - \frac{2}{x^2}} = y(x)$ . Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in ]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x > 0$ in quanto funzione esponenziale. Nessuna intersezione con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0} e^{1 - \frac{2}{x^2}} = e^{(\to -\infty)} = 0$; il punto $O(0,0)$ è punto di discontinuità di terza specie.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1 - \frac{2}{x^2}} = e^{1 - (\to 0)} = e$; $AOr$ di equazione $y = e$.

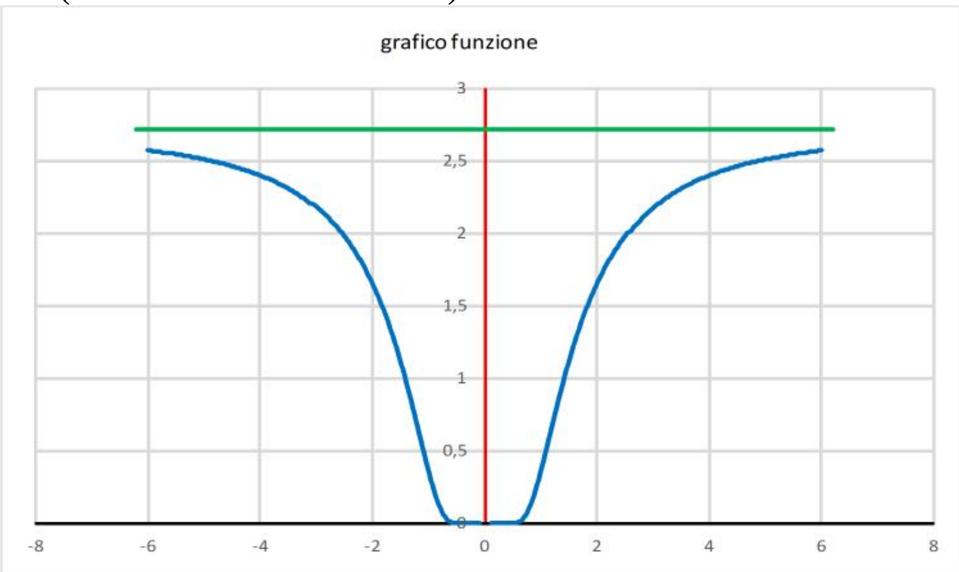
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1 - \frac{2}{x^2}} \cdot \left( \dfrac{4}{x^3} \right) = \dfrac{4\, e^{1 - \frac{2}{x^2}}}{x^3}$ . $y' > 0,\ \forall x \in ]0, +\infty[$.

Funzione strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{4\, e^{1 - \frac{2}{x^2}} \cdot \left( \frac{4}{\cancel{x^3}} \right) \cdot \cancel{x^3} - 4\, e^{1 - \frac{2}{x^2}} \cdot 3x^2}{x^6} =$

$\frac{4\,e^{1-\frac{2}{x^2}}(4-3x^2)}{x^6}$ . $y''>0,$ se $4-3x^2>0 \Rightarrow\ x^2<\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ x<\sqrt{\frac{4}{3}}$ . Funzione strettamente convessa in $\left]0,\sqrt{\frac{4}{3}}\right]$ , strettamente concava in $\left[\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right[$ . Punto di flesso $F\left(\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ .

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^9\left(\frac{x^2-4x-2}{2\sqrt{x}}\right)dx$ .

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^9\left(\frac{x^2-4x-2}{2\sqrt{x}}\right)dx\ =\ \int_1^9\left(\frac{x\sqrt{x}}{2}-2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\ =$$

$$\int_1^9\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx\ =\ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}-2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)_1^9\ =$$

$$\left(\frac{1}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right)_1^9\ =\ \left(\frac{243}{5}-36-6\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}-2\right)\ =$$

$$\frac{33}{5}+\frac{47}{15}\ =\ \frac{146}{15}\ .$$

*Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione*: posto $\sqrt{x}=t$, si ottiene $x=t^2$ da cui $dx=2t\,dt$, quindi:

$$\int_1^9\left(\frac{x^2-4x-2}{2\sqrt{x}}\right)dx\ =\ \int_1^3\left(\frac{t^4-4t^2-2}{\cancel{2t}}\right)\cancel{2t}\,dt\ =\ \int_1^3\left(t^4-4t^2-2\right)dt\ =$$

$$\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3-2t\right)_1^3\ =\ \left(\frac{243}{5}-36-6\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}-2\right)\ =\ \frac{33}{5}+\frac{47}{15}\ =\ \frac{146}{15}\ .$$

7) (7 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione $f(x)=e^{2x}-sen\,x.$

7) Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2$ . Nel nostro caso $f(x)=e^{2x}-sen\,x,$

$f(0)=1$, $f'(x)=2e^{2x}-cos\,x$, $f'(0)=1$, $f''(x)=4e^{2x}+sen\,x$, $f''(0)=4$.
Quindi $P_2(x)=1+x+2x^2$ .

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione
$f(x,\,y)=\,-2x^3+6x^2+5xy-y^2$ .

8) $\nabla f=(\,-6x^2+12x+5y, 5x-2y)$.

$FOC$: $\begin{cases} -6x^2+12x+5y=0 \\ 5x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x^2+49x=0 \\ y=\frac{5}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(49-12x)=0 \\ y=\frac{5}{2}x \end{cases}$

$\nearrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\searrow \begin{cases} x=\dfrac{49}{12} \\ y=\dfrac{245}{24} \end{cases}$ , due punti critici $O(0,0)$ e $A\left(\dfrac{49}{12},\dfrac{245}{24}\right)$.

$\mathcal{H}f=\begin{bmatrix} -12x+12 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f|=\begin{vmatrix} -12x+12 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=24x-49$.

$SOC$: $|\mathcal{H}f(O)|=\,-49<0$. $O$ punto di sella.
$|\mathcal{H}f(A)|=49>0$, $f''_{y,y}(A)=\,-2<0$. $A$ punto di massimo relativo.

## Compito $\mathbb{G}5$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici $p$, $q$ e $r$; costruire la tavola di verità della proposizione composta $((p\;o\;r)\;e\;\neg(p\Rightarrow q))\Leftrightarrow r$.

1)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p\;o\;r$ | $\neg(p\Rightarrow q)$ | $(p\;o\;r)\;e\;\neg(p\Rightarrow q)$ | $((p\;o\;r)\;e\;\neg(p\Rightarrow q))\Leftrightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |

.

2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $\mathbb{A}=\{x\in\mathbb{R}\colon 1\le x\le 6\}$ e $\mathbb{B}=\{x\in\mathbb{R}\colon 2x\le x^2\}$. Determinare gli insiemi $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$ e calcolare i loro insiemi frontiera, $\delta(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})$ e $\delta(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})$.

2) $\mathbb{A}=\{x\in\mathbb{R}\colon 1\le x\le 6\}=[1,6]$; $\mathbb{B}=\{x\in\mathbb{R}\colon 2x\le x^2\}=$
$\{x\in\mathbb{R}\colon x^2-2x\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}\colon x(x-2)\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}\colon x\le 0\vee x\ge 2\}=$
$]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$.
$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}=[1,6]\cup(]-\infty,0]\cup[2,+\infty[)=\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$;
$\delta(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})=\{0,1\}$.
$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=[1,6]\cap(]-\infty,0]\cup[2,+\infty[)=[2,6]$; $\delta(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})=\{2,6\}$.

3) (6 punti) Sia date le funzioni $f(x)=log\left(x^3-2\right)$ e $g(x)=\sqrt[5]{4^x-11}$. Determinare le espressioni delle loro funzioni inverse: $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$.

3) Per determinare l'inversa di $f$ poniamo $y=log\left(x^3-2\right)$ da cui $x^3-2=e^y$ ed in conclusione $x=\sqrt[3]{2+e^y}$, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2+e^x}$; procediamo allo stesso modo per la funzione $g$, posto $y=\sqrt[5]{4^x-11}$ si ottiene $4^x-11=y^5$ da cui $4^x=11+y^5$ ed infine $x=log_4(11+y^5)$, $g^{-1}(x)=log_4(11+x^5)$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2-5x}-1}{4x}$ ; $\lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{2+x}\right)^x$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2-5x}-1}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2-5x}-1}{x^2-5x} \cdot \frac{(x-5)}{4} = (\to 1) \cdot \frac{(\to -5)}{4} = -\frac{5}{4}$.

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $2+x \asymp x$, quindi

$\lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{2+x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$y = arctg\left(1-\frac{4}{x^2}\right)$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta due punti di flesso, uno di ascissa positiva e l'altro di ascissa negativa.)

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

$y(-x) = arctg\left(1-\frac{4}{(-x)^2}\right) = arctg\left(1-\frac{4}{x^2}\right) = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in ]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $arctg\left(1-\frac{4}{x^2}\right) > 0 \Rightarrow 1-\frac{4}{x^2} > 0$

$\Rightarrow \frac{4}{x^2} < 1 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$. Funzione negativa in $]0, 2[$, positiva in $]2, +\infty[$.

Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(2, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0} arctg\left(1-\frac{4}{x^2}\right) = arctg(\to -\infty) = -\frac{\pi}{2}$; il punto $B(0, -\frac{\pi}{2})$ è punto di discontinuità di terza specie.

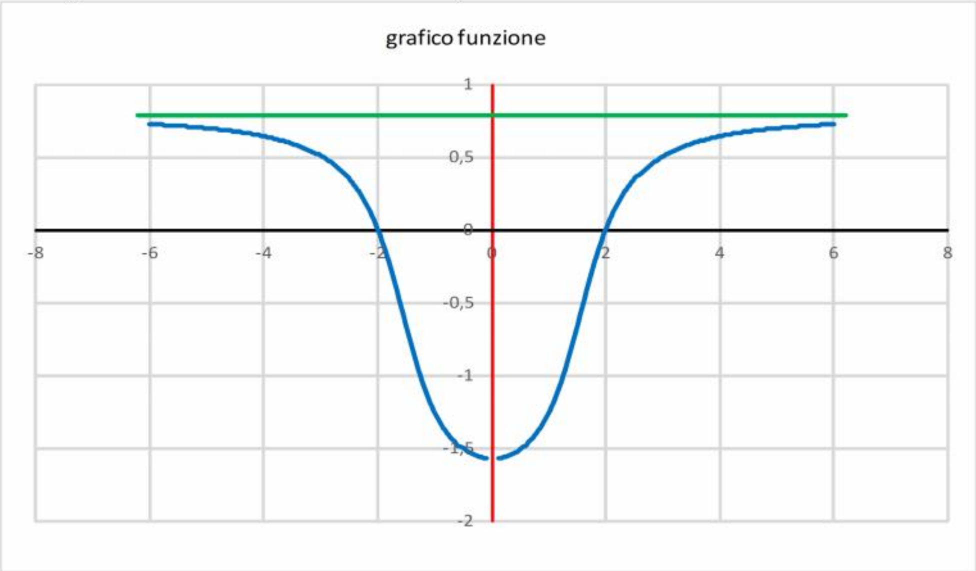
$\lim_{x \to +\infty} arctg\left(1-\frac{4}{x^2}\right) = arctg(\to 1) = \frac{\pi}{4}$; $AOr$ di equazione $y = \frac{\pi}{4}$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{1+\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{8}{x^3}\right)$. $y' > 0, \forall x \in ]0, +\infty[$.

Funzione strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: la stretta monotonia crescente della funzione insieme all'esistenza dell'asintoto orizzontale ed ad un unico punto di flesso di ascissa positiva implicano che la funzione è strettamente convessa in un intorno destro di $0$ e strettamente concava nel resto di $]0, +\infty[$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):




.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^1 (2 \cdot log\,(1+x))\,dx$ .

6) Determiniamo una primitiva della funzione integranda tramite l'integrazione per parti:

$$\int (2 \cdot log\,(1+x))\,dx \;=2x \cdot log\,(1+x) - \int \left(2x \cdot \frac{1}{1+x}\right) dx \;=$$

$$2x \cdot log\,(1+x) - 2\int \left(\frac{x}{1+x}\right) dx \;= 2x \cdot log\,(1+x) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \;=$$

$$2x \cdot log\,(1+x) - 2(x - log\,(1+x)) = 2((1+x) \cdot log\,(1+x) - x).$$

Per l'integrale definito otteniamo:

$$\int_0^1 (2 \cdot log\,(1+x))\,dx \;=\; (2((1+x) \cdot log\,(1+x) - x))_0^1 \;=$$

$$(2(2 \cdot log\,2 - 1)) - 0 \;= 2(log\,4 - 1).$$

*Metodo Alternativo - Integriamo per sostituzione e poi per parti*: posto $1+x=t$, si ottiene $x = t-1$ da cui $dx = dt$, quindi:

$$\int (2 \cdot log\,(1+x))\,dx \;=\; 2\int log\,t\,dt \;= 2\left(t \cdot log\,t - \int \left(\cancel{t} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\right) dt\right) =$$

$$2\left(t \cdot log\,t - \int dt\right) = 2(t \cdot log\,t - t).$$

Per l'integrale definito risulta:

$$\int_0^1 (2 \cdot log\,(1+x))\,dx \;=\; 2\int_1^2 log\,t\,dt \;=\; 2(t \cdot log\,t - t)_1^2 \;=$$

$$2((2 \cdot log\,2 - 2) - (\,-1)) \;= 2(log\,4 - 1).$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot cos\,x + b \cdot sen\,x$ . Determinare i valori dei parametri $a$ e $b$ sapendo che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$; e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y(0) = a \cdot cos\,0 + b \cdot sen\,0 = a$, quindi $a = 1$; $y'(x) = \,-a \cdot sen\,x + b \cdot cos\,x$ con $y'(0) = \,-a \cdot sen\,0 + b \cdot cos\,0 = b$, quindi $b = 1$; $y = cos\,x + sen\,x$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è

$P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) \cdot x^2$ . Nel nostro caso è sufficiente calcolare

$y''(0)$, $y''(x) = -\cos x - sen\, x$ con $y''(0) = -\cos 0 - sen\, 0 = -1$. Quindi $P_2(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$.

8) (8 punti) Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x,y) = \frac{y - x^2}{1 + y^2}$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) L'equazione del piano tangente alla superficie è $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot (x,y)$.

$$z(P) = 0,\ \nabla z = \left( \frac{-2x}{1+y^2}, \frac{1 \cdot (1+y^2) - (y - x^2) \cdot 2y}{(1+y^2)^2} \right) \text{ con } \nabla z(P) = (0,1).$$

Equazione del piano tangente: $z = y$ ovvero $z - y = 0$.

## Compito $\mathbb{G}6$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici $p$, $q$ e $r$; costruire la tavola di verità della proposizione composta $((p\ e\ r) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)) \Rightarrow r$.

1)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p\ e\ r$ | $p\ o\ \neg q$ | $(p\ e\ r) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)$ | $((p\ e\ r) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |

.

2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le 4\}$ e $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}: -x \le x^2\}$. Determinare gli insiemi $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ e $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ e calcolare i loro insiemi interni, $\left(\overset{\circ}{\overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}}}\right)$ e $\left(\overset{\circ}{\overline{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}}}\right)$.

2) $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le 4\} = [0,4]$; $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}: -x \le x^2\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \ge 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x+1) \ge 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \le -1 \vee x \ge 0\} =$
$]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = [0,4] \cup (]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) = ]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$;
$\left(\overset{\circ}{\overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}}}\right) = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$.
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = [0,4] \cap (]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) = [0,4]$; $\left(\overset{\circ}{\overline{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}}}\right) = ]0,4[$.

3) (6 punti) Sia date le funzioni $f(x) = log\left(2 + \frac{6}{x}\right)$ e $g(x) = 4^{\sqrt[3]{x}}$. Determinare le espressioni delle loro funzioni inverse: $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$.

3) Per determinare l'inversa di $f$ poniamo $y = log\left(2 + \frac{6}{x}\right)$ da cui $2 + \frac{6}{x} = e^y$ e $\frac{6}{x} = e^y - 2$ ed in conclusione $x = \frac{6}{e^y - 2}$, $f^{-1}(x) = \frac{6}{e^x - 2}$; procediamo allo stesso modo per la funzione $g$, posto $y = 4^{\sqrt[3]{x}}$ si ottiene $\sqrt[3]{x} = log_4 y$ da cui $x = (log_4 y)^3$, $g^{-1}(x) = (log_4 x)^3$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2-3x)}{x}$ ;
$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{6x+1}\right)^x$ .

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2-3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2-3x)}{x^2-3x}\cdot(x-3) = (\to 1)\cdot(\to -3) = -3.$

Per il secondo limite notiamo che per $x\to +\infty$, $6x+1 \asymp 6x$, quindi
$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{6x+1}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1/6}{x}\right)^x = e^{1/6}.$

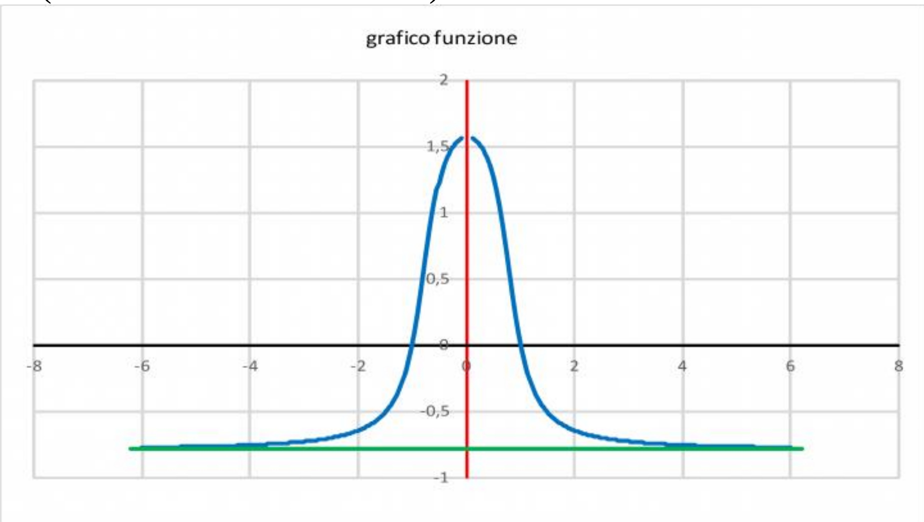
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione
$y = arctg\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$ . (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta due punti di flesso, uno di ascissa positiva e l'altro di ascissa negativa.)

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} = ]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
$y(-x) = arctg\left(\frac{1}{(-x)^2}-1\right) = arctg\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x\in ]0,+\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $arctg\left(\frac{1}{x^2}-1\right)>0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}-1>0$
$\Rightarrow \frac{1}{x^2}>1 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow x<1$ . Funzione positiva in $]0,1[$, negativa in $]1,+\infty[$.
Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(1,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x\to 0} arctg\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = arctg(\to +\infty) = \frac{\pi}{2}$ ; il punto $B(0,\frac{\pi}{2})$ è punto di discontinuità di terza specie.
$\lim_{x\to +\infty} arctg\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = arctg(\to -1) = -\frac{\pi}{4}$ ; $AOr$ di equazione $y = -\frac{\pi}{4}$ .

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)$ . $y'<0$, $\forall x\in ]0,+\infty[$.
Funzione strettamente decrescente in $]0,+\infty[$.
Concavità e convessità: la stretta monotonia decrescente della funzione insieme all'esistenza dell'asintoto orizzontale ed ad un unico punto di flesso di ascissa positiva implicano che la funzione è strettamente concava in un intorno destro di $0$ e strettamente convessa nel resto di $]0,+\infty[$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_{-1}^{0}(5 \cdot log\,(2+x))\,dx$ .

6) Determiniamo una primitiva della funzione integranda tramite l'integrazione per parti:

$\int(5 \cdot log\,(2+x))\,dx = 5x \cdot log\,(2+x) - \int\left(5x \cdot \frac{1}{2+x}\right)dx =$

$5x \cdot log\,(2+x) - 5\int\left(\frac{x}{2+x}\right)dx = 5x \cdot log\,(2+x) - 5\int\left(1 - \frac{2}{2+x}\right)dx =$

$5x \cdot log\,(2+x) - 5(x - 2log\,(2+x)) = 5((2+x) \cdot log\,(2+x) - x)$.

Per l'integrale definito otteniamo:

$\int_{-1}^{0}(5 \cdot log\,(2+x))\,dx = (5((2+x) \cdot log\,(2+x) - x))_{-1}^{0} =$

$(5(2 \cdot log\,2)) - (5) = 5(log\,4 - 1)$.

*Metodo Alternativo - Integriamo per sostituzione e poi per parti*: posto $2+x=t$, si ottiene $x=t-2$ da cui $dx=dt$, quindi:

$\int(5 \cdot log\,(2+x))\,dx = 5\int log\,t\,dt = 5(t \cdot log\,t - t)$. (Per la ricerca di una primitiva della funzione integranda si veda la soluzione del compito G5)

Per l'integrale definito risulta:

$\int_{-1}^{0}(5 \cdot log\,(2+x))\,dx = 5\int_{1}^{2} log\,t\,dt = 5(t \cdot log\,t - t)_{1}^{2} =$

$5((2 \cdot log\,2 - 2) - (-1)) = 5(log\,4 - 1)$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot e^{x} + b$ . Determinare i valori dei parametri $a$ e $b$ sapendo che $y(0)=2$ e $y'(0)=-1$; e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y(0) = a \cdot e^{0} + b = a + b$, quindi $a+b=2$; $y'(x) = a \cdot e^{x}$ con $y'(0) = a \cdot e^{0} = a$, quindi $a=-1$ e $b=3$; $y=-e^{x}+3$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2}y''(0) \cdot x^2$ . Nel nostro caso è sufficiente calcolare $y''(0)$, $y''(x) = -e^{x}$ con $y''(0) = -e^{0} = -1$. Quindi $P_2(x) = 2 - x - \frac{1}{2}x^2$ .

8) (8 punti) Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x,y) = y + 5x^2 + \left(1-y^2\right)^3$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) L'equazione del piano tangente alla superficie è $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot (x,y)$.

$z(P) = 1,\ \nabla z = \left(10x, 1 + 3\left(1-y^2\right)^2(-2y)\right)$ con $\nabla z(P) = (0,1)$.

Equazione del piano tangente: $z - 1 = y$ ovvero $z - y = 1$.

## Compito $\mathbb{G}7$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici $p$, $q$ e $r$; costruire la tavola di verità della proposizione composta $p \Rightarrow ((q \Leftrightarrow r)\ e\ \neg(q \Rightarrow r))$.

1)

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \Leftrightarrow r$ | $\neg(q \Rightarrow r)$ | $(q \Leftrightarrow r)\ e\ \neg(q \Rightarrow r)$ | $p \Rightarrow ((q \Leftrightarrow r)\ e\ \neg(q \Rightarrow r))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |

.

2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}: -3 \le x \le 0\}$ e $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}: 5x > -x^2\}$. Determinare gli insiemi $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ e $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ e calcolare i loro insiemi frontiera, $\delta(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$ e $\delta(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$.

2) $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}: -3 \le x \le 0\} = [-3,0]$; $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}: 5x > -x^2\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x+5) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -5 \vee x > 0\} = ]-\infty, -5[ \cup ]0, +\infty[$.

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = [-3,0] \cup (]-\infty, -5[ \cup ]0, +\infty[) = ]-\infty, -5[ \cup [-3, +\infty[$; $\delta(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \{-5, -3\}$.

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = [-3,0] \cap (]-\infty, -5[ \cup ]0, +\infty[) = \emptyset$; $\delta(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \emptyset$.

3) (6 punti) Sia date le funzioni $f(x) = e^{3-2x}$ e $g(x) = \sqrt[3]{1-x^7}$. Determinare le espressioni delle loro funzioni inverse: $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$.

3) Per determinare l'inversa di $f$ poniamo $y = e^{3-2x}$ da cui $3 - 2x = log\, y$ e $2x = 3 - log\, y$ ed in conclusione $x = \dfrac{3 - log\, y}{2}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{3 - log\, x}{2}$; procediamo allo stesso modo per la funzione $g$, posto $y = \sqrt[3]{1-x^7}$ si ottiene $1 - x^7 = y^3$ da cui $x^7 = 1 - y^3$ ed in conclusione $x = \sqrt[7]{1-y^3}$, $g^{-1}(x) = \sqrt[7]{1-x^3}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x^2}{x^2 - 3x^3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x-6}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x^2}{x^2 - 3x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x^2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1-3x} = (\to 1) \cdot (\to 1) = 1$.

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $3x - 6 \asymp 3x$, quindi

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x-6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^3 = (\to e)^3 = e^3$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = arctg\left(x^2 - 1\right)$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda.

La funzione presenta due punti di flesso, uno di ascissa positiva e l'altro di ascissa negativa.)

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

$y(-x) = arctg\left((-x)^2 - 1\right) = arctg\left(x^2 - 1\right) = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $arctg\left(x^2 - 1\right) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$ $\Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$. Funzione negativa in $[0, 1[$, positiva in $]1, +\infty[$.

Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(1, 0)$, $y(0) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

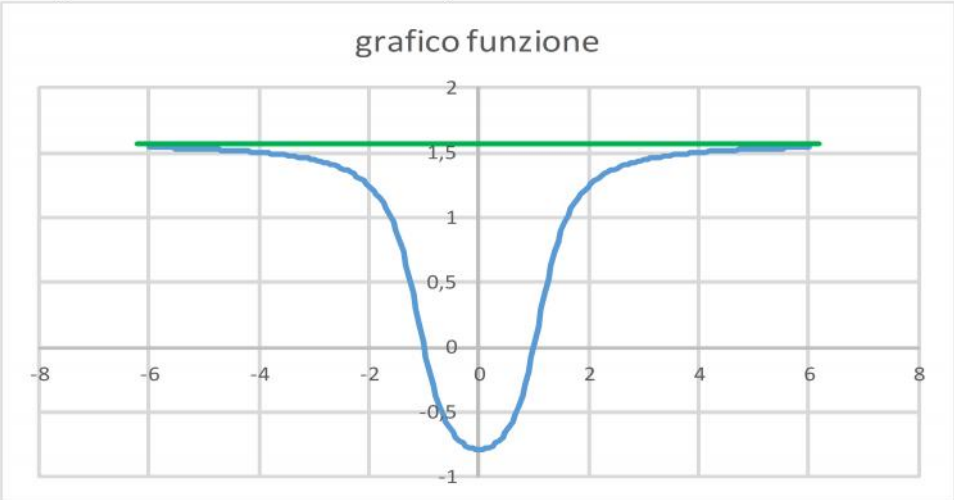
$\lim_{x \to +\infty} arctg\left(x^2 - 1\right) = arctg(\to +\infty) = \frac{\pi}{2}$; $AOr$ di equazione $y = \frac{\pi}{2}$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{1 + \left(x^2 - 1\right)^2} \cdot 2x$. $y' > 0, \forall x \in ]0, +\infty[$.

Funzione strettamente crescente in $]0, +\infty[$, il punto $B\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ è punto di minimo assoluto.

Concavità e convessità: la stretta monotonia crescente della funzione insieme all'esistenza dell'asintoto orizzontale ed ad un unico punto di flesso di ascissa positiva implicano che la funzione è strettamente convessa in un intorno destro di 0 e strettamente concava nel resto di $]0, +\infty[$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^2 (4 \cdot log\,(3 - x))\,dx$.

6) Determiniamo una primitiva della funzione integranda tramite l'integrazione per parti:

$$\int (4 \cdot log\,(3 - x))\,dx = 4x \cdot log\,(3 - x) - \int \left(4x \cdot \frac{1}{3 - x} \cdot (-1)\right) dx =$$
$$4x \cdot log\,(3 - x) - 4 \int \left(\frac{-x}{3 - x}\right) dx = 4x \cdot log\,(3 - x) - 4 \int \left(1 - \frac{3}{3 - x}\right) dx =$$
$$4x \cdot log\,(3 - x) - 4(x + 3log\,(3 - x)) = 4((x - 3) \cdot log\,(3 - x) - x).$$

Per l'integrale definito otteniamo:

$$\int_0^2 (4 \cdot log\,(3 - x))\,dx = (4((x - 3) \cdot log\,(3 - x) - x))_0^2 =$$
$$(-8) - (4(-3 \cdot log\,3)) = 4(log\,27 - 2).$$

*Metodo Alternativo - Integriamo per sostituzione e poi per parti*: posto $3-x=t$, si ottiene $x=3-t$ da cui $dx=-dt$, quindi:
$\int(4\cdot log\,(3-x))\,dx \;=\; -4\int log\,t\,dt \;=\; -4(t\cdot log\,t-t)$. (Per la ricerca di una primitiva della funzione integranda si veda la soluzione del compito G5)
Per l'integrale definito risulta:
$\int_0^2(4\cdot log\,(3-x))\,dx \;=\; -4\int_3^1 log\,t\,dt \;=\; 4\int_1^3 log\,t\,dt \;=\; 4(t\cdot log\,t-t)_1^3 \;=$
$4((3\cdot log\,3-3)-(-1)) \;=4(log\,27-2)$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y=a\cdot sen\,x+b$ . Determinare i valori dei parametri $a$ e $b$ sapendo che $y(0)=1$ e $y'(0)=-1$; e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y(0)=a\cdot sen\,0+b=b$, quindi $b=1$; $y'(x)=a\cdot cos\,x$ con $y'(0)=a\cdot cos\,0=a$, quindi $a=-1$; $y=-sen\,x+1$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x)=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2$ . Nel nostro caso è sufficiente calcolare $y''(0)$, $y''(x)=sen\,x$ con $y''(0)=sen\,0=0$. Quindi $P_2(x)=1-x$ .

8) (8 punti) Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z=f(x,y)=\dfrac{2-y-x^2}{1+x^2}$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) L'equazione del piano tangente alla superficie è $z-z(P)=\nabla z(P)\cdot(x,y)$.

$z(P)=2,\ \nabla z=\left(\dfrac{-2x(1+x^2)-(2-y-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2},\dfrac{-1}{1+x^2}\right)$ con $\nabla z(P)=(0,-1)$.

Equazione del piano tangente: $z-2=-y$ ovvero $z+y=2$.

## Compito $\mathbb{G}8$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici $p$, $q$ e $r$; costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q\Rightarrow r)\Rightarrow((q\Leftrightarrow p)\ o\ \neg q)$.

1)

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\Leftrightarrow p$ | $q\Rightarrow r$ | $(q\Leftrightarrow p)\ o\ \neg q$ | $(q\Rightarrow r)\Rightarrow((q\Leftrightarrow p)\ o\ \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

.

2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $\mathbb{A}=\{x\in\mathbb{R}\colon -3\le x\le 3\}$ e $\mathbb{B}=\{x\in\mathbb{R}\colon -5x>x^2\}$. Determinare gli insiemi $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$ e calcolare i loro insiemi interni, $\overset{\circ}{\left(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}\right)}$ e $\overset{\circ}{\left(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}\right)}$.

2) $\mathbb{A}=\{x\in\mathbb{R}\colon -3\le x\le 3\}=[-3,3]$; $\mathbb{B}=\{x\in\mathbb{R}\colon -5x>x^2\}=$
$\{x\in\mathbb{R}\colon x^2+5x<0\}=\{x\in\mathbb{R}\colon x(x+5)<0\}=\{x\in\mathbb{R}\colon -5<x<0\}=$

$]-5,0[$.

$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}=[-3,3]\cup]-5,0[=]-5,3]$; $\overset{\circ}{\overline{(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})}}=]-5,3[$.

$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=[-3,3]\cap]-5,0[=[-3,0[$; $\overset{\circ}{\overline{(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})}}=]-3,0[$.

3) (6 punti) Sia date le funzioni $f(x)=3^{1+\frac{2}{x}}$ e $g(x)=\sqrt[5]{1-x^3}$. Determinare le espressioni delle loro funzioni inverse: $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$.

3) Per determinare l'inversa di $f$ poniamo $y=3^{1+\frac{2}{x}}$ da cui $1+\dfrac{2}{x}=log_3 y$ e $\dfrac{2}{x}=log_3 y-1$ ed in conclusione $x=\dfrac{2}{log_3 y-1}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2}{log_3 x-1}$;
procediamo allo stesso modo per la funzione $g$, posto $y=\sqrt[5]{1-x^3}$ si ottiene $1-x^3=y^5$ da cui $x^3=1-y^5$ ed in conclusione $x=\sqrt[3]{1-y^5}$,
$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x^5}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3+4x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{x+7}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3+4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x+4}=(\to 1)\cdot\left(\to\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Per il secondo limite notiamo che per $x\to+\infty$, $x+7\asymp x$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+7}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1/2}{x}\right)^{x}=$$
$$=e^{-1/2}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y=arctg\left(x^2-9\right)$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta due punti di flesso, uno di ascissa positiva e l'altro di ascissa negativa.)

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

$y(-x)=arctg\left((-x)^2-9\right)=arctg\left(x^2-9\right)=y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x\in[0,+\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $arctg\left(x^2-9\right)>0\Rightarrow x^2-9>0$ $\Rightarrow x^2>9\Rightarrow x>3$. Funzione negativa in $[0,3[$, positiva in $]3,+\infty[$.

Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(3,0)$, $y(0)=arctg(-9)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

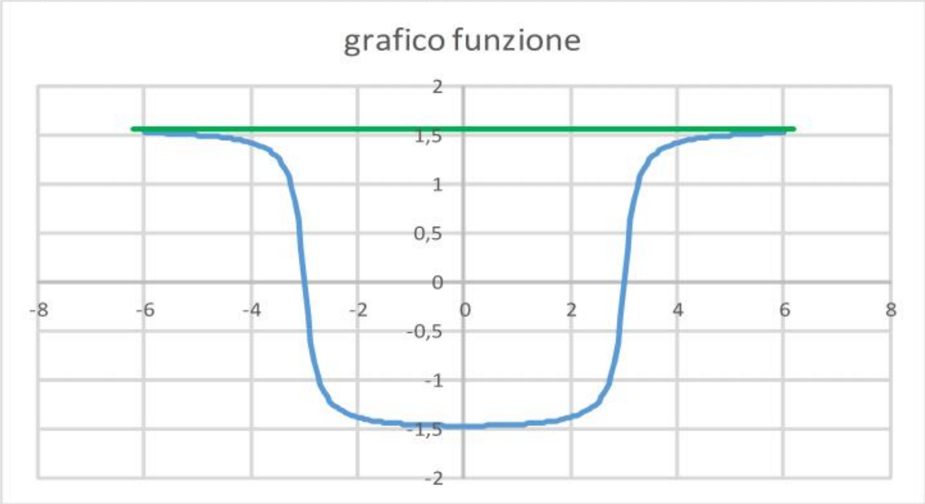
$\lim\limits_{x\to+\infty}arctg\left(x^2-9\right)=arctg(\to+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$; $AOr$ di equazione $y=\dfrac{\pi}{2}$.

Crescenza e decrescenza: $y'=\dfrac{1}{1+\left(x^2-9\right)^2}\cdot 2x$. $y'>0$, $\forall x\in]0,+\infty[$.

Funzione strettamente crescente in $]0,+\infty[$, il punto $B(0,arctg(-9))$ è punto di minimo assoluto.

Concavità e convessità: la stretta monotonia crescente della funzione insieme all'esistenza dell'asintoto orizzontale ed ad un unico punto di flesso di ascissa positiva implicano che la funzione è strettamente convessa in un intorno destro di $0$ e strettamente concava nel resto di $]0,+\infty[$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):




.

6) (8 punti) Calcolare $\int_{-1}^{0} (3 \cdot log\,(1-x))\,dx$ .

6) Determiniamo una primitiva della funzione integranda tramite l'integrazione per parti:

$\int (3 \cdot log\,(1-x))\,dx = 3x \cdot log\,(1-x) - \int \left(3x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)\right) dx =$

$3x \cdot log\,(1-x) - 3\int \left(\frac{-x}{1-x}\right) dx = 3x \cdot log\,(1-x) - 3\int \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) dx =$

$3x \cdot log\,(1-x) - 3(x + log\,(1-x)) = 3((x-1) \cdot log\,(1-x) - x)$.

Per l'integrale definito otteniamo:

$\int_{-1}^{0} (3 \cdot log\,(1-x))\,dx = (3((x-1) \cdot log\,(1-x) - x))_{-1}^{0} =$

$0 - (3(-2 \cdot log\,2 + 1)) = 3(log\,4 - 1)$.

*Metodo Alternativo - Integriamo per sostituzione e poi per parti*: posto $1 - x = t$, si ottiene $x = 1 - t$ da cui $dx = -dt$, quindi:

$\int (3 \cdot log\,(1-x))\,dx = -3\int log\,t\,dt = -3(t \cdot log\,t - t)$. (Per la ricerca di una primitiva della funzione integranda si veda la soluzione del compito G5)

Per l'integrale definito risulta:

$\int_{-1}^{0} (3 \cdot log\,(1-x))\,dx = -3\int_{2}^{1} log\,t\,dt = 3\int_{1}^{2} log\,t\,dt = 3(t \cdot log\,t - t)_{1}^{2} =$

$3((2 \cdot log\,2 - 2) - (-1)) = 3(log\,4 - 1)$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot cos\,x + b \cdot x$ . Determinare i valori dei parametri $a$ e $b$ sapendo che $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$; e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y(0) = a \cdot cos\,0 + b \cdot 0 = a$, quindi $a = -1$; $y'(x) = -a \cdot sen\,x + b$ con $y'(0) = -a \cdot sen\,0 + b = b$, quindi $b = 1$; $y = -cos\,x + x$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è

$P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2}y''(0) \cdot x^2$ . Nel nostro caso è sufficiente calcolare

$y''(0)$, $y''(x) = cos\,x$ con $y''(0) = cos\,0 = 1$. Quindi $P_2(x) = -1 + x + \frac{1}{2}x^2$ .

8) (8 punti) Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x,y) = (2 - y - x^2) \cdot (1 - y^2)$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) L'equazione del piano tangente alla superficie è $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot (x, y)$.

$z(P) = 2,\ \nabla z = \big( - 2x \cdot \big(1 - y^2\big),\ - \big(1 - y^2\big) + \big(2 - y - x^2\big) \cdot ( - 2y)\big)$ con $\nabla z(P) = (0,\ - 1)$. Equazione del piano tangente: $z - 2 = \ - y$ ovvero $z + y = 2$.