Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

6 febbraio 2023

Compito $\mathbb{F}1$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q\ o\ (p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow \neg(p\ o\ q)$.

1)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q\ o\ (p \Leftrightarrow q)$	$\neg(p\ o\ q)$	$(q\ o\ (p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow \neg(p\ o\ q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

.

2) (7 punti) Sia $f(x) = e^{3x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = 2 + sen\, x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = e^{3x}$ si ottiene $f(g(x)) = e^{3g(x)}$, posto $e^{3g(x)} = 2 + sen\, x$ si ha $3g(x) = log(2 + sen\, x)$ da cui $g(x) = \frac{1}{3}log(2 + sen\, x)$. Per le funzioni composte abbiamo:

$$g(g(x)) = g\left(\frac{1}{3}log(2 + sen\, x)\right) = \frac{1}{3}log\left(2 + sen\left(\frac{1}{3}log(2 + sen\, x)\right)\right);$$

$$g(f(x)) = g\left(e^{3x}\right) = \frac{1}{3}log\left(2 + sen\, e^{3x}\right).$$

3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:

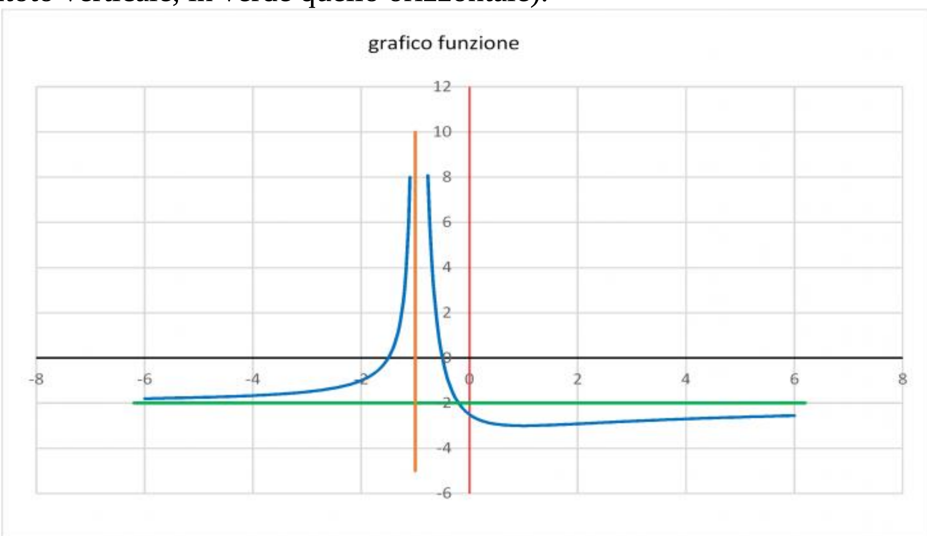
$i.$ $C.E. = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$;

$ii.$ asintoto verticale di equazione $x = -1$;

$iii.$ asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = -2$;

$iiii.$ punto di minimo assoluto di coordinate $(1; -3)$.

3) Di seguito il grafico di una funzione che presenta le caratteristiche richieste (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale).



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) - sen\, x}{x^2 + 3x}$;

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{6x - 2}\right)^{3x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) - sen\, x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) - sen\, x}{x(x+3)} =$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen(2x)}{2x} \cdot 2 - \frac{sen\, x}{x} \right) \cdot \frac{1}{x+3} = ((\to 1) \cdot 2 - (\to 1)) \cdot \frac{1}{(\to 3)} = \frac{1}{3}$.

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $6x - 2 \asymp 6x$, quindi

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{6x-2}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{6x}\right)^{3x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1/6}{x}\right)^{x} \right)^{3} = \left(\to e^{1/6}\right)^{3} = e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Il primo limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) - sen\, x}{x^2 + 3x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{cos(2x) \cdot 2 - cos\, x}{2x + 3} =$

$\frac{(\to 1) \cdot 2 - (\to 1)}{(\to 3)} = \frac{1}{3}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^{-x}}{1+x}$.

5) $C.E.$: $1 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$; $C.E. = \mathbb{R} \backslash \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $1 + x > 0$ ovvero $x > -1$, in quanto $e^{-x} > 0$ per ogni $x \in C.E.$, funzione negativa in $]-\infty, -1[$, positiva in $]-1, +\infty[$. Nessuna intersezione con l'asse delle ascisse; $y(0) = \frac{e^{-0}}{1+0} = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to -\infty)} = -\infty$; in quanto per $x \to -\infty$, $1 + x = o(e^{-x})$;

tale limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to -\infty)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = \frac{(\to -\infty)}{1} =$

$-\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x + x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to -\infty$, $x + x^2 = o(e^{-x})$; anche in questo caso il limite può essere risolto ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{(\to e)}{(\to 0^{\pm})} = \pm\infty$; AV di equazione $x = -1$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{e^{(\to -\infty)}}{(\to +\infty)} = \frac{(\to 0)}{(\to +\infty)} = 0$; $AOrDx$ di equazione $y = 0$.

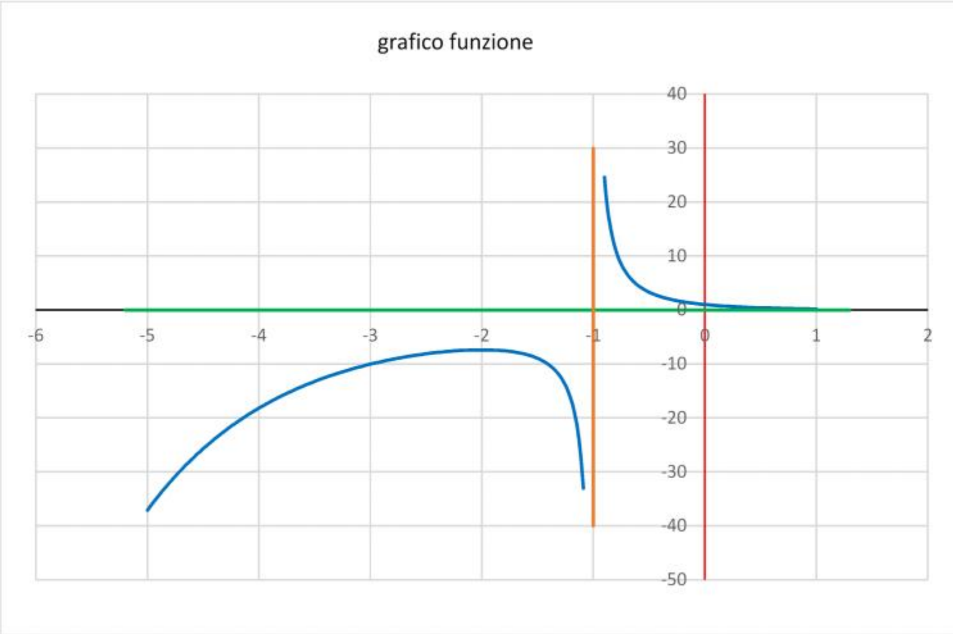
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-e^{-x} \cdot (1+x) - e^{-x} \cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{(2+x)e^{-x}}{(1+x)^2}$. $y' > 0$ se $2 + x < 0 \Rightarrow x < -2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -2]$, strettamente decrescente in $[-2, -1[$ e in $]-1, +\infty[$; punto di massimo relativo per $x = -2$, con $y(-2) = -e^2$.

Concavità e convessità:

$$y'' = -\frac{(1 \cdot e^{-x} + (2+x) \cdot e^{-x} \cdot (-1)) \cdot (1+x)^2 - (2+x)e^{-x} \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} =$$

$$-\frac{-(1+x)\cdot e^{-x}\cdot(1+x)^2-2\cdot(2+x)e^{-x}\cdot(1+x)}{(1+x)^4}=$$
$$\frac{(1+x)\cdot e^{-x}\cdot\left((1+x)^2+2\cdot(2+x)\right)}{(1+x)^4}=$$
$$\frac{(1+x)\cdot e^{-x}\cdot\left(1+(2+x)^2\right)}{(1+x)^4}.$$

$y''>0,$ se $1+x>0\Rightarrow x>-1$. Funzione strettamente concava in $]-\infty,-1[$, strettamente convessa in $]-1,+\infty[$. Nessun punto di flesso.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale, in rosso quello verticale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)

6) Posto $\sqrt{1+\log x}=t$ risulta $1+\log x=t^2$, da cui $\log x=t^2-1$ e $x=e^{t^2-1}$, con $dx=de^{t^2-1}=e^{t^2-1}\cdot 2t\cdot dt$. Veniamo adesso all'integrale definito:

$$\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx=\int_1^2\frac{t}{\cancel{e^{t^2-1}}}\cancel{e^{t^2-1}}\cdot 2t\cdot dt=\int_1^2 2t^2\,dt=\left(\frac{2}{3}\cdot t^3\right)_1^2=$$
$$\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y=a\cdot x^2+b\cdot e^x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0)=1$ e $y''(0)=-3$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y'(x)=2a\cdot x+b\cdot e^x$ con $y'(0)=2a\cdot 0+b\cdot e^0=b$, quindi $b=1$;
$y''(x)=2a+b\cdot e^x$ con $y''(0)=2a+b\cdot e^0=2a+b$, quindi $2a+b=-3$, da cui $a=-2$; $y=-2\cdot x^2+e^x$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x)=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2$. Nel nostro caso è sufficiente calcolare $y(0)=-2\cdot 0^2+e^0=1$. Quindi
$$P_2(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2.$$

8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x,y) = x^2 + \alpha y^2 + 6x - 8y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-3, -1)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

8) $\nabla f = (2x + 6, 2\alpha y - 8)$, $\nabla f(-3, -1) = (0, -2\alpha - 8)$; se $(-3, -1)$ è punto critico di f allora $\nabla f(-3, -1) = (0,0)$. Posto $-2\alpha - 8 = 0$ si ottiene $\alpha = -4$. $f(x,y) = x^2 - 4y^2 + 6x - 8y$, con $\nabla f = (2x + 6, -8y - 8)$, $\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ e $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 < 0$. $(-3, -1)$ punto di sella.

Compito $\mathbb{F}2$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\neg q \Leftrightarrow (p\ e\ q)) \Rightarrow (p\ o\ q)$.

1)

p	q	$p\ e\ q$	$\neg q \Leftrightarrow (p\ e\ q)$	$p\ o\ q$	$(\neg q \Leftrightarrow (p\ e\ q)) \Rightarrow (p\ o\ q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V

.

2) (7 punti) Sia $f(x) = \sqrt{1-x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = cos\,x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = \sqrt{1-x}$ si ottiene $f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)}$, posto $\sqrt{1-g(x)} = cos\,x$ si ha $1 - g(x) = cos^2 x$ da cui $g(x) = 1 - cos^2 x$. Per le funzioni composte abbiamo:

$g(g(x)) = g\left(1 - cos^2 x\right) = 1 - cos^2(1 - cos^2 x)$;

$g(f(x)) = g\left(\sqrt{1-x}\right) = 1 - cos^2\sqrt{1-x}$.

3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:

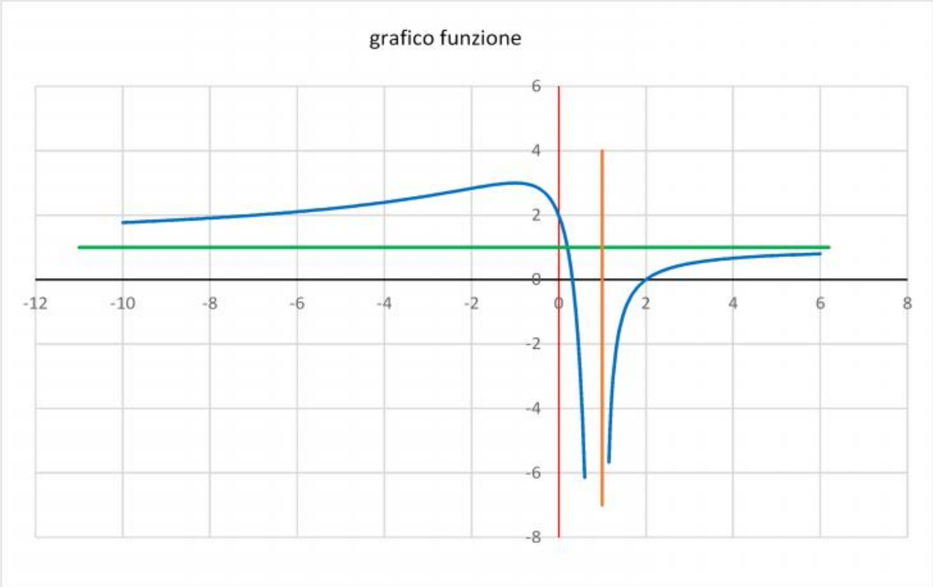
$i.$ $C.E. = \mathbb{R} \backslash \{1\}$;

$ii.$ asintoto verticale di equazione $x = 1$;

$iii.$ asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 1$;

$iiii.$ punto di massimo assoluto di coordinate $(-1; 3)$.

3) Di seguito il grafico di una funzione che presenta le caratteristiche richieste (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale).



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)+sen\,x}{x^2-5x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x+12}\right)^{-2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)+sen\,x}{x^2-5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)+sen\,x}{x(x-5)} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{sen(3x)}{3x}\cdot 3+\dfrac{sen\,x}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x-5} = ((\to 1)\cdot 3+(\to 1))\cdot\dfrac{1}{(\to -5)} =$

$-\dfrac{4}{5}$.

Per il secondo limite notiamo che per $x\to +\infty$, $5x+12\asymp 5x$, quindi

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x+12}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{-2x} =$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(1+\dfrac{1/5}{x}\right)^{x}\right)^{-2} = (\to e^{1/5})^{-2} = e^{-2/5} = 1/\sqrt[5]{e^2}.$

Il primo limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)+sen\,x}{x^2-5x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos(3x)\cdot 3+cos\,x}{2x-5} =$

$\dfrac{(\to 1)\cdot 3+(\to 1)}{(\to -5)} = -\dfrac{4}{5}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$y=\dfrac{e^x}{3-x}$.

5) $C.E.$: $3-x\neq 0\Rightarrow x\neq 3$; $C.E.=\mathbb{R}\backslash\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $3-x>0$ ovvero $x<3$, in quanto $e^x>0$ per ogni $x\in C.E.$, funzione positiva in $]-\infty,3[$, negativa in $]3,+\infty[$.

Nessuna intersezione con l'asse delle ascisse; $y(0)=\dfrac{e^0}{3-0}=\dfrac{1}{3}$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

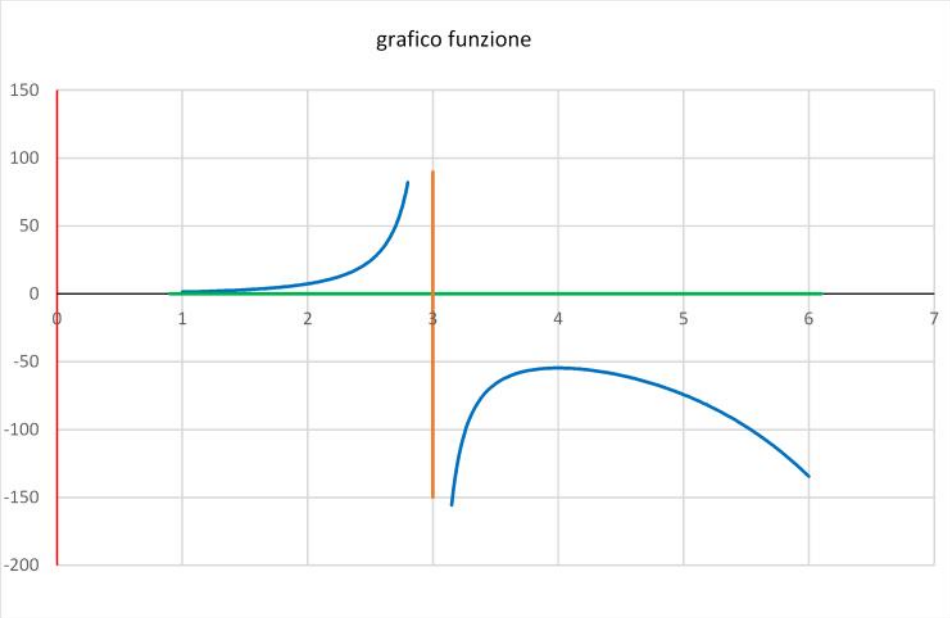
$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{3-x} = \frac{e^{(\to -\infty)}}{(\to +\infty)} = \frac{(\to 0)}{(\to +\infty)} = 0$; $AOrSx$ di equazione $y = 0$.
$\lim_{x \to 3^\pm} \frac{e^x}{3-x} = \frac{(\to e^3)}{(\to 0^\mp)} = \mp\infty$; AV di equazione $x = 3$.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3-x} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to -\infty)} = -\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $3 - x = o(e^x)$;
tale limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3-x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to -\infty)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{-1} = \frac{(\to +\infty)}{-1} =$
$-\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x - x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to -\infty)} = -\infty$; in quanto per
$x \to -\infty$, $3x - x^2 = o(e^x)$; anche in questo caso il limite può essere risolto ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^x \cdot (3-x) - e^x \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{(4-x)e^x}{(3-x)^2}$. $y' > 0$ se
$4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 3[$ e in $]3, 4]$, strettamente decrescente in $[4, +\infty[$; punto di massimo relativo per $x = 4$, con $y(4) = -e^4$.
Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{(-1 \cdot e^x + (4-x) \cdot e^x) \cdot (3-x)^2 - (4-x)e^x \cdot 2(3-x) \cdot (-1)}{(3-x)^4} =$$
$$\frac{(3-x) \cdot e^x \cdot (3-x)^2 + 2 \cdot (4-x)e^x \cdot (3-x)}{(3-x)^4} =$$
$$\frac{(3-x) \cdot e^x \cdot \left((3-x)^2 + 2 \cdot (4-x)\right)}{(3-x)^4} =$$
$$\frac{(3-x) \cdot e^x \cdot \left(1 + (4-x)^2\right)}{(3-x)^4}.$$

$y'' > 0$, se $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 3[$, strettamente concava in $]3, +\infty[$. Nessun punto di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale, in rosso quello verticale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_{e}^{e^2} \frac{2+log\,x}{x \cdot log\,x}\,dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)

6) Posto $log\,x = t$ risulta $x = e^t$, con $dx = de^t = e^t \cdot dt$. Veniamo adesso all'integrale definito:

$$\int_{e}^{e^2} \frac{2+log\,x}{x \cdot log\,x}\,dx \;=\; \int_{1}^{2} \frac{2+t}{\cancel{e^t} \cdot t}\cancel{e^t} \cdot dt \;=\; \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{t}+1\right)dt \;=\; (2 \cdot log\,|t| + t)_1^2 \;=$$

$$(2 \cdot log\,2 + 2) - (2 \cdot log\,1 + 1) \;=\; 2 \cdot log\,2 + 1\,.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot sen\,x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = -1$ e $y''(0) = 4$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y'(x) = 2a \cdot x + b \cdot cos\,x$ con $y'(0) = 2a \cdot 0 + b \cdot cos\,0 = b$, quindi $b = -1$; $y''(x) = 2a - b \cdot sen\,x$ con $y''(0) = 2a - b \cdot sen\,0 = 2a$, quindi $2a = 4$, da cui $a = 2$; $y = 2 \cdot x^2 - sen\,x$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2}y''(0) \cdot x^2$. Nel nostro caso è sufficiente calcolare $y(0) = 2 \cdot 0^2 - sen\,0 = 0$. Quindi $P_2(x) = -x + 2x^2$.

8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x,y) = \alpha x^2 + 4y^2 + 2x - 8y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-3,1)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

8) $\nabla f = (2\alpha x + 2, 8y - 8)$, $\nabla f(-3,1) = (-6\alpha + 2, 0)$; se $(-3,1)$ è punto critico di f allora $\nabla f(-3,1) = (0,0)$. Posto $-6\alpha + 2 = 0$ si ottiene $\alpha = \frac{1}{3}$.

$f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + 4y^2 + 2x - 8y$, con $\nabla f = \left(\frac{2}{3}x + 2, 8y - 8\right)$, $\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$,

$|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = \frac{16}{3} > 0$ e $f''_{y,y} = 8 > 0$. $(-3,1)$ punto di minimo relativo.

Compito $\mathbb{F}3$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q\ e\ \neg(p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow (p\ o\ q)$.

1)

p	q	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$q\ e\ \neg(p \Leftrightarrow q)$	$p\ o\ q$	$(q\ e\ \neg(p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow (p\ o\ q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V

.

2) (7 punti) Sia $f(x) = \sqrt{2-x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = sen\, x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = \sqrt{2-x}$ si ottiene $f(g(x)) = \sqrt{2-g(x)}$, posto $\sqrt{2-g(x)} = sen\, x$ si ha $2-g(x) = sen^2 x$ da cui $g(x) = 2 - sen^2 x$. Per le funzioni composte abbiamo:

$g(g(x)) = g\left(2 - sen^2 x\right) = 2 - sen^2(2 - sen^2 x)$;

$g(f(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) = 2 - sen^2\sqrt{2-x}$.

3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:

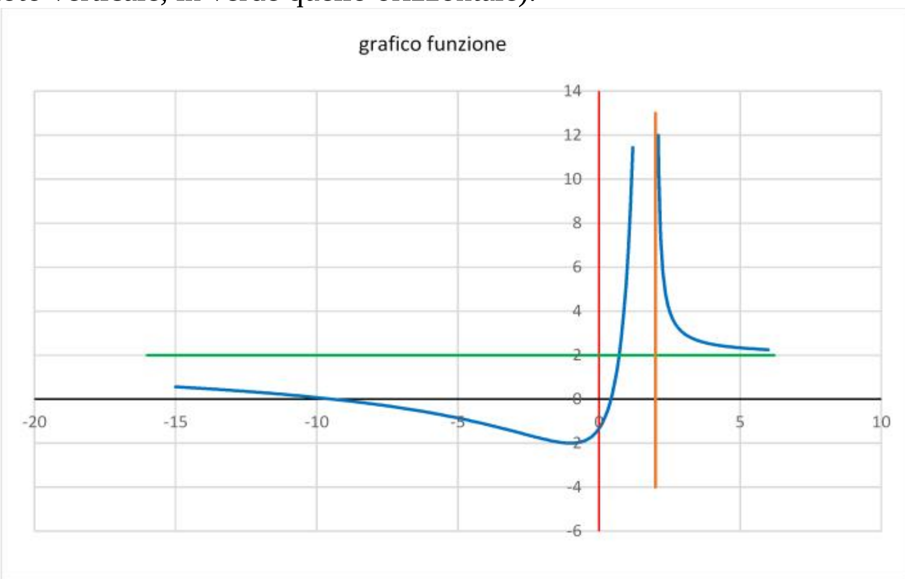
$i.$ $C.E. = \mathbb{R}\backslash\{2\}$;

$ii.$ asintoto verticale di equazione $x = 2$;

$iii.$ asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 2$;

$iiii.$ punto di minimo assoluto di coordinate $(-1;\ -2)$.

3) Di seguito il grafico di una funzione che presenta le caratteristiche richieste (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale).



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(3x)}{x^2+3x^3}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+6}\right)^{8x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(3x)}{x^2+3x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1-cos(3x)}{x^2(1+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-cos(3x)}{9x^2} \cdot 9 \cdot \frac{1}{1+3x} =$

$\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 9 \cdot \frac{1}{(\to 1)} = \frac{9}{2}$.

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $x+6 \asymp x$, quindi

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+6}\right)^{8x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{8x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{8} =$

$(\to e)^8 = e^8$.

Il primo limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(3x)}{x^2+3x^3} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)} \text{ - } FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{sen(3x) \cdot 3}{2x+9x^2} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)} \text{ -}FI$$

$$\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{cos(3x) \cdot 9}{2+18x} = \frac{(\to 1) \cdot 9}{(\to 2)} = \frac{9}{2}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = \frac{e^{1+x}}{x}.$$

5) $C.E.$: $x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$y(-x) = \dfrac{e^{1-x}}{-x} = -\dfrac{e^{1-x}}{x}$; espressione diversa da $y(x)$ e anche da $-y(x)$.

Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x > 0$, in quanto $e^{1+x} > 0$ per ogni $x \in C.E.$, funzione negativa in $]-\infty, 0[$, positiva in $]0, +\infty[$. Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{1+x}}{x} = \frac{e^{(\to -\infty)}}{(\to -\infty)} = \frac{(\to 0)}{(\to -\infty)} = 0$; $AOrSx$ di equazione $y = 0$.

$\displaystyle\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{e^{1+x}}{x} = \frac{(\to e)}{(\to 0^{\pm})} = \pm\infty$; AV di equazione $x = 0$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+x}}{x} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^{1+x})$; tale limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+x}}{x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)} \text{ - } FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+x}}{1} = \frac{(\to +\infty)}{1} = +\infty.$$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+x}}{x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x^2 = o(e^{1+x})$; anche in questo caso il limite può essere risolto ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{e^{1+x} \cdot x - e^{1+x} \cdot 1}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^{1+x}}{x^2}$. $y' > 0$ se $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty[$; punto di minimo relativo per $x = 1$, con $y(1) = e^2$.

Concavità e convessità:

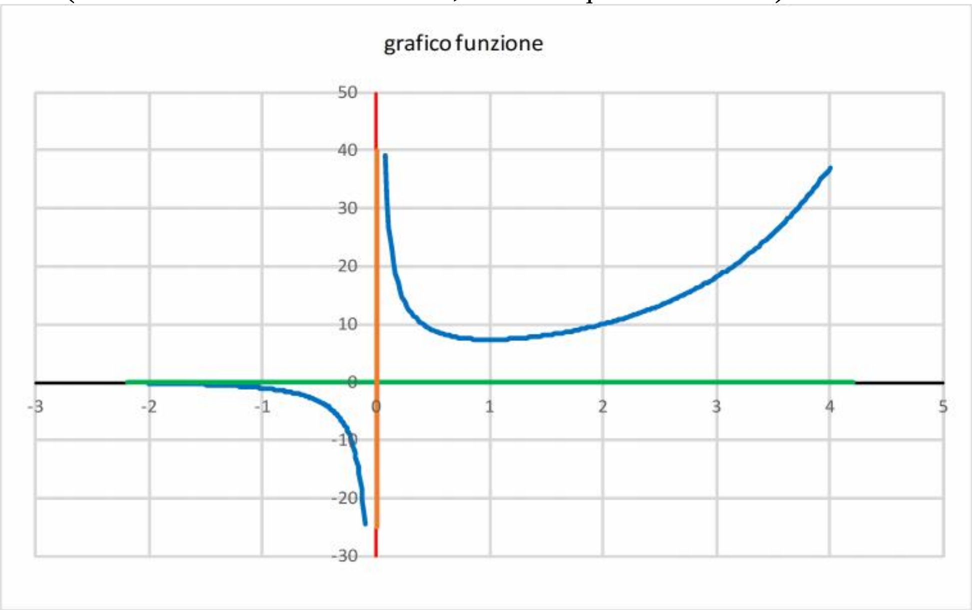
$$y'' = \frac{(1 \cdot e^{1+x} + (x-1) \cdot e^{1+x}) \cdot x^2 - (x-1)e^{1+x} \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{x \cdot e^{1+x} \cdot x^2 - 2 \cdot (x-1)e^{1+x} \cdot x}{x^4} = \frac{x \cdot e^{1+x} \cdot (x^2 - 2 \cdot (x-1))}{x^4} =$$

$$\frac{x \cdot e^{1+x} \cdot \left(1 + (x-1)^2\right)}{x^4}.$$

$y'' > 0$, se $x > 0$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 0[$, strettamente convessa in $]0, +\infty[$. Nessun punto di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale, in rosso quello verticale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{4 - log\, x}}{x}\, dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)

6) Posto $\sqrt{4 - log\, x} = t$ risulta $4 - log\, x = t^2$, da cui $log\, x = 4 - t^2$ e $x = e^{4-t^2}$, con $dx = de^{4-t^2} = e^{4-t^2} \cdot (- 2t) \cdot dt$. Veniamo adesso all'integrale definito:

$$\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{4 - log\, x}}{x}\, dx \; = \; \int_2^1 \frac{t}{\cancel{e^{4-t^2}}} \cancel{e^{4-t^2}} \cdot (- 2t) \cdot dt \; = \; \int_2^1 - 2t^2\, dt \; =$$

$$\left(- \frac{2}{3} \cdot t^3 \right)_2^1 \; = \; - \frac{2}{3} + \frac{16}{3} \; = \; \frac{14}{3} \, .$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot e^{2x}$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = 2$ e $y''(0) = 6$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y'(x) = 2a \cdot x + 2b \cdot e^{2x}$ con $y'(0) = 2a \cdot 0 + 2b \cdot e^0 = 2b$, quindi $b = 1$; $y''(x) = 2a + 4b \cdot e^{2x}$ con $y''(0) = 2a + 4b \cdot e^0 = 2a + 4b$, quindi $2a + 4b = 6$, da cui $a = 1$; $y = x^2 + e^{2x}$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) \cdot x^2$. Nel nostro caso è sufficiente calcolare $y(0) = 0^2 + e^0 = 1$. Quindi $P_2(x) = 1 + 2x + 3x^2$.

8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \alpha x - 16y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(3, 4)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

8) $\nabla f = (2x + \alpha, 4y - 16)$, $\nabla f(3, 4) = (6 + \alpha, 0)$; se $(3, 4)$ è punto critico di f allora $\nabla f(3, 4) = (0, 0)$. Posto $6 + \alpha = 0$ si ottiene $\alpha = - 6$.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x - 16y$, con $\nabla f = (2x - 6, 4y - 16)$, $\mathcal{H} f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e

$|\mathcal{H} f| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$ e $f''_{x,x} = 2 > 0$. $(3, 4)$ punto di minimo relativo.

Compito $\mathbb{F}4$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q \Leftrightarrow \neg(p\ e\ q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

1)

p	q	$\neg(p\ e\ q)$	$q \Leftrightarrow \neg(p\ e\ q)$	$p \Rightarrow q$	$(q \Leftrightarrow \neg(p\ e\ q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V

.

2) (7 punti) Sia $f(x) = e^{-2x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = 3 - cos\, x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = e^{-2x}$ si ottiene $f(g(x)) = e^{-2g(x)}$, posto $e^{-2g(x)} = 3 - cos\, x$ si ha $-2g(x) = log(3 - cos\, x)$ da cui $g(x) = -\frac{1}{2} log(3 - cos\, x)$. Per le funzioni composte abbiamo:

$$g(g(x)) = g\left(-\frac{1}{2}log(3 - cos\, x)\right) = -\frac{1}{2}log\left(3 - cos\left(-\frac{1}{2}log(3 - cos\, x)\right)\right);$$

$$g(f(x)) = g\left(e^{-2x}\right) = -\frac{1}{2}log\left(3 - cos\left(e^{-2x}\right)\right).$$

3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:

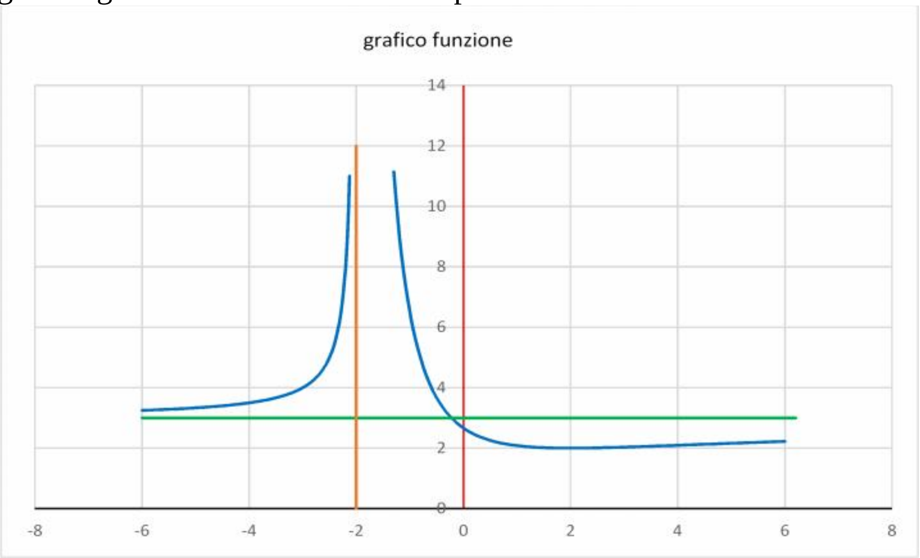
$i.$ $C.E. = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$;

$ii.$ asintoto verticale di equazione $x = -2$;

$iii.$ asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 3$;

$iiii.$ punto di minimo assoluto di coordinate $(2; 2)$.

3) Di seguito il grafico di una funzione che presenta le caratteristiche richieste.



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{5x^2 + x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{6x + 5}\right)^x$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{5x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{x(5x + 1)} =$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 + \frac{e^{-3x} - 1}{-3x} \cdot 3\right) \cdot \frac{1}{5x + 1} =$$

$$((\to 1) \cdot 3 + (\to 1) \cdot 3) \cdot \frac{1}{(\to 1)} = 6\,.$$

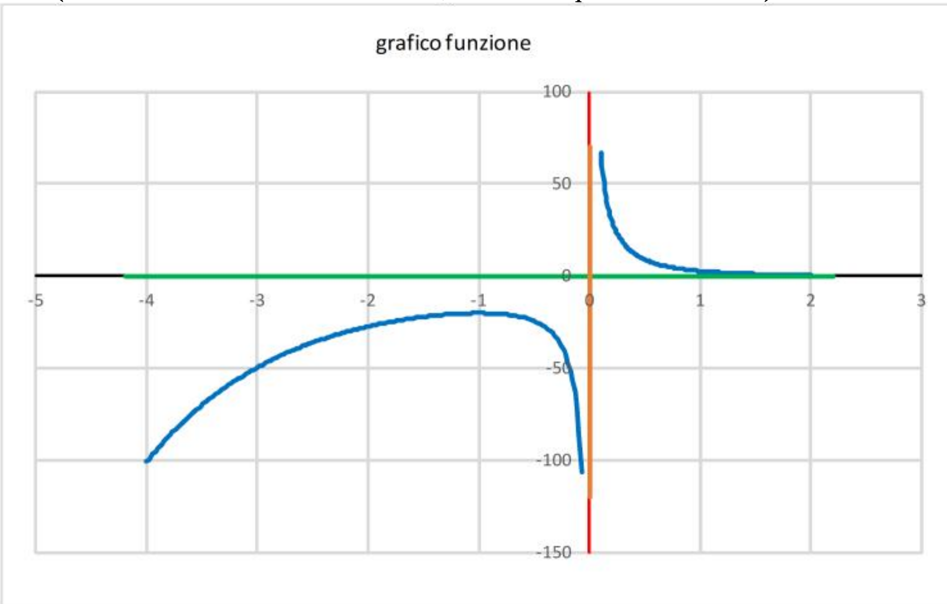
Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $6x+5 \asymp 6x$, quindi
$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{6x+5}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{6x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1/6}{x}\right)^x =$
$e^{-1/6} = 1/\sqrt[6]{e}$.

Il primo limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:
$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{5x^2 + x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} \cdot 3 - e^{-3x} \cdot (-3)}{10x + 1} =$
$\frac{(\to 1) \cdot 3 - (\to 1) \cdot (-3)}{(\to 1)} = 6\,.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione
$y = \frac{e^{2-x}}{x}$.

5) $C.E.$: $x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
$y(-x) = \frac{e^{2+x}}{-x} = -\frac{e^{2+x}}{x}$; espressione diversa da $y(x)$ e anche da $-y(x)$.
Funzione né pari né dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x > 0$, in quanto $e^{2-x} > 0$ per ogni $x \in C.E.$, funzione negativa in $]-\infty, 0[$, positiva in $]0, +\infty[$. Nessuna intersezione con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2-x}}{x} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to -\infty)} = \frac{(\to +\infty)}{(\to -\infty)} = -\infty$; in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{2-x})$; tale limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:
$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2-x}}{x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to -\infty)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2-x} \cdot (-1)}{1} =$
$\frac{(\to +\infty) \cdot (-1)}{1} = -\infty.$
$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to -\infty$, $x^2 = o(e^{2-x})$; anche in questo caso il limite può essere risolto ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.
$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{e^{2-x}}{x} = \frac{(\to e^2)}{(\to 0^{\pm})} = \pm\infty$; AV di equazione $x = 0$.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2-x}}{x} = \frac{e^{(\to -\infty)}}{(\to +\infty)} = \frac{(\to 0)}{(\to +\infty)} = 0$; $AOrDx$ di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^{2-x} \cdot (-1) \cdot x - e^{2-x} \cdot 1}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{2-x}}{x^2}$.
$y' > 0$ se $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -1]$, strettamente decrescente in $[-1, 0[$ e in $]0, +\infty[$; punto di massimo relativo per $x = -1$, con $y(-1) = -e^3$.
Concavità e convessità:
$y'' = -\frac{(1 \cdot e^{2-x} + (x+1) \cdot e^{2-x} \cdot (-1)) \cdot x^2 - (x+1)e^{2-x} \cdot 2x}{x^4} =$
$\frac{x \cdot e^{2-x} \cdot x^2 + 2 \cdot (x+1)e^{2-x} \cdot x}{x^4} = \frac{x \cdot e^{2-x} \cdot (x^2 + 2 \cdot (x+1))}{x^4} =$
$\frac{x \cdot e^{2-x} \cdot \left(1 + (x+1)^2\right)}{x^4}$.

$y'' > 0,$ se $x > 0$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 0[$, strettamente convessa in $]0, +\infty[$. Nessun punto di flesso.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale, in rosso quello verticale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1 + log^2\, x}{x}\, dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)

6) Posto $log\, x = t$ risulta $x = e^t$, con $dx = de^t = e^t \cdot dt$. Veniamo adesso all'integrale definito:

$$\int_e^{e^2} \frac{1 + log^2\, x}{x}\, dx = \int_1^2 \frac{1+t^2}{\cancel{e^t}} \cancel{e^t} dt = \int_1^2 (1+t^2)\, dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right)_1^2 =$$
$$\left(2 + \frac{8}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3}.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x + b \cdot cos\, x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = -2$ e $y''(0) = 2$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.

7) $y'(x) = a - b \cdot sen\, x$ con $y'(0) = a - b \cdot sen\, 0 = a$, quindi $a = -2$;
$y''(x) = -b \cdot cos\, x$ con $y''(0) = -b \cdot cos\, 0 = -b$, quindi $b = -2$;
$y = -2 \cdot x - 2 \cdot cos\, x$. Ricordiamo che l'espressione del polinomio di McLaurin di secondo grado è $P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) \cdot x^2$. Nel nostro caso è sufficiente calcolare $y(0) = -2 \cdot 0 + -2 \cdot cos\, 0 = -2$. Quindi $P_2(x) = -2 - 2x + x^2$.

8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = -x^2 + 4y^2 - 8x + \alpha y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-4, -1)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

8) $\nabla f = (-2x - 8, 8y + \alpha)$, $\nabla f(-4, -1) = (0, -8 + \alpha)$; se $(-4, -1)$ è punto critico di f allora $\nabla f(-4, -1) = (0, 0)$. Posto $-8 + \alpha = 0$ si ottiene $\alpha = 8$.

$f(x,y) = -x^2 + 4y^2 - 8x + 8y$, con $\nabla f = (-2x-8, 8y+8)$,
$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16 < 0$. $(-4, -1)$ punto di sella.

Compito $\mathbb{F}5$

1) (6 punti) Siano I_1 e I_2 due intervalli con $I_1 = [-2;2]$ e $I_2 = [0;4]$; sia inoltre I_3 un intervallo tale per cui $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [-5;4]$ e $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = [0;1[$. Determinare l'intervallo I_3 e calcolare l'insieme frontiera dell'unione fra I_1 e I_3, $\delta(I_1 \cup I_3)$, e l'insieme derivato dell'intersezione fra I_2 e I_3, $D(I_2 \cap I_3)$.

1) $I_1 \cup I_2 = [-2;4]$, se $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [-5;4]$ abbiamo che $min(I_3) = -5$ e $Sup(I_3) \leq 4$; passiamo adesso alle intersezioni: $I_1 \cap I_2 = [0;2]$, se $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = [0;1[$ concludiamo che $Sup(I_3) = 1$ e $1 \notin I_3$, quindi $I_3 = [-5;1[$.
$I_1 \cup I_3 = [-5;2]$, $\delta(I_1 \cup I_3) = \{-5;2\}$, $I_2 \cap I_3 = [0;1[$ e $D(I_2 \cap I_3) = [0;1]$.

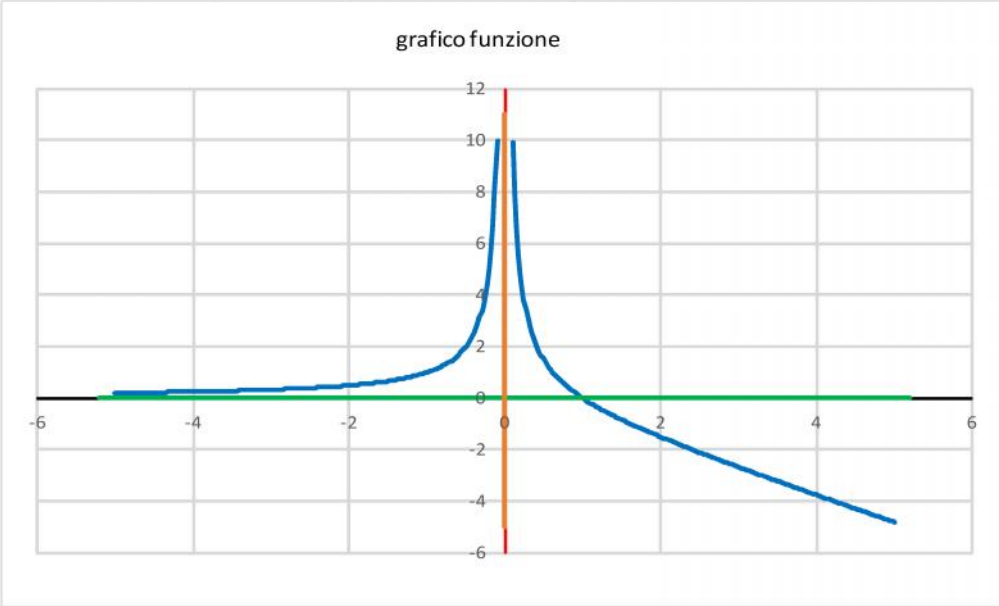
2) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = log\, x$; risolvere la disequazione $g(f(x)) > -1$.

2) $g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$. Per la disequazione si ha $log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) > -1$ che equivale a $\dfrac{1}{1+x^2} > e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, da cui $1 + x^2 < e$ ovvero $x^2 < e - 1$ con soluzioni $-\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$.

3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione f che soddisfa le seguenti tre definizioni di limite:
1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_\epsilon > 0\colon\ 0 < |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) > \epsilon$;
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_\epsilon > 0\colon\ x > \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) < -\epsilon$;
3. $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_\epsilon > 0\colon\ x < -\delta_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$.

3) 1. $(\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_\epsilon > 0\colon\ 0 < |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) > \epsilon) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty\right)$;
2. $(\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_\epsilon > 0\colon\ x > \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) < -\epsilon) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right)$;
3. $(\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_\epsilon > 0\colon\ x < -\delta_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\right)$.

Di seguito il grafico di una funzione che presenta le caratteristiche richieste (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale).



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sen\,x}-1}{x+sen\,x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sen\,x}-1}{x+sen\,x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{sen\,x}-1}{sen\,x}}{\frac{x}{sen\,x}+1} = \dfrac{(\to 1)}{(\to 1)+1} = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}\right)^{-2} = \left(\to e^{-2}\right)^{-2} = e^{4}$.

Il primo limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sen\,x}-1}{x+sen\,x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sen\,x}\cdot cos\,x}{1+cos\,x} = \dfrac{(\to 1)\cdot(\to 1)}{1+(\to 1)} = \dfrac{1}{2}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{e^{x^2}}{x}$.

5) $C.E.$: $x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$y(-x) = \dfrac{e^{(-x)^2}}{-x} = -\dfrac{e^{x^2}}{x} = -y(x)$. Funzione dispari, la studiamo solo per $x > 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x > 0$, funzione positiva in $]0, +\infty[$. Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{x^2}}{x} = \dfrac{1}{(\to 0^+)} = +\infty$; AV di equazione $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x} = \dfrac{e^{(\to+\infty)}}{(\to+\infty)} = \dfrac{(\to+\infty)}{(\to+\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x = o\left(e^{x^2}\right)$; tale limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x} = \dfrac{(\to+\infty)}{(\to+\infty)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}\cdot 2x}{1} =$

$\dfrac{(\to+\infty)\cdot(\to+\infty)}{1} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x^2 = o\left(e^{x^2}\right)$; anche in questo caso il limite può essere risolto ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot x - e^{x^2} \cdot 1}{x^2} = \frac{(2x^2-1)e^{x^2}}{x^2}$. $y' > 0$ se $2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1/2 \Rightarrow x > \sqrt{1/2}$. Funzione strettamente decrescente in $]0, \sqrt{1/2}]$, strettamente crescente in $[\sqrt{1/2}, +\infty[$; punto di minimo relativo per $x = \sqrt{1/2}$, con $y\left(\sqrt{1/2}\right) = \sqrt{2e}$.

Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{\left(4x \cdot e^{x^2} + (2x^2-1) \cdot e^{x^2} \cdot 2x\right) \cdot x^2 - (2x^2-1)e^{x^2} \cdot 2x}{x^4} =$$

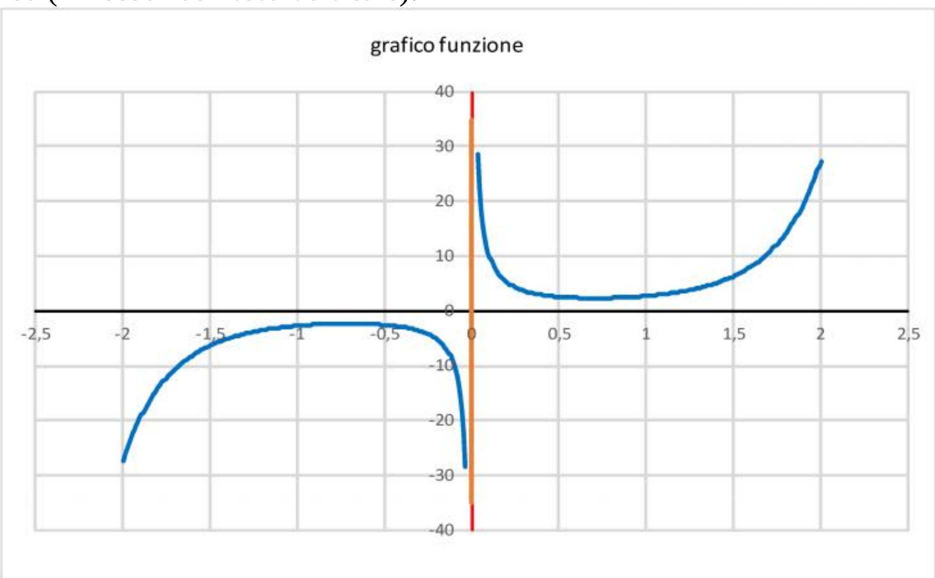
$$\frac{(4x^3+2x) \cdot e^{x^2} \cdot x^2 - (2x^2-1) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{2x \cdot e^{x^2} \cdot ((2x^2+1) \cdot x^2 - (2x^2-1))}{x^4} =$$

$$\frac{2x \cdot e^{x^2} \cdot \left(x^4 + (x^2 - 1/4)^2 + 3/4\right)}{x^4}.$$

$y'' > 0$, se $2x > 0 \Rightarrow x > 0$. Funzione strettamente convessa in $]0, +\infty[$. Nessun punto di flesso.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^e (x + \log x)\, dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per parti)

6) $\int_1^e (x + \log x)\, dx = \int_1^e 1 \cdot (x + \log x)\, dx$. Posto 1 come fattore differenziale e $x + \log x$ come fattore finito risulta:

$$\int 1 \cdot (x + \log x)\, dx = x \cdot (x + \log x) - \int x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$x \cdot (x + \log x) - \int (x+1)\, dx = x \cdot (x + \log x) - \frac{1}{2}x^2 - x + c =$$

$\frac{1}{2}x^2 + x \cdot log\, x - x + c\,.$

Veniamo adesso all'integrale definito:

$$\int_1^e (x + log\, x)\, dx \;=\; \left(\frac{1}{2}x^2 + x \cdot log\, x - x\right)_1^e \;=$$

$$\left(\frac{1}{2}e^2 + e \cdot log\, e - e\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \cdot log\, 1 - 1\right) \;=\; \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{e^2+1}{2}\,.$$

7) (7 punti) Determinare i polinomio di McLaurin di terzo grado della funzione di equazione $y = x \cdot sen\, x + cos\, x$.

7) L'espressione del polinomio di McLaurin di terzo grado è

$$P_3(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2}y''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0) \cdot x^3\,.$$

$y(x) = x \cdot sen\, x + cos\, x \qquad y(0) = 0 \cdot sen\, 0 + cos\, 0 = 1;$

$y'(x) = 1 \cdot sen\, x + x \cdot cos\, x - sen\, x = x \cdot cos\, x \qquad y'(0) = 0 \cdot cos\, 0 = 0;$

$y''(x) = 1 \cdot cos\, x - x \cdot sen\, x = cos\, x - x \cdot sen\, x$

$y''(0) = cos\, 0 - 0 \cdot sen\, 0 = 1;$

$y'''(x) = \,- sen\, x - 1 \cdot sen\, x - x \cdot cosx = \,- 2sen\, x - x \cdot cosx$

$y'''(0) = \,- 2sen\, 0 - 0 \cdot cos0 = 0. \qquad P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$

8) (8 punti) Studiare la natura dei punti critici della funzione

$f(x,y) = x^3 - 2xy + \frac{1}{2} \cdot y^3$

8) $\nabla f = \left(3x^2 - 2y,\, -2x + \frac{3}{2} \cdot y^2\right)$.

$$FOC\colon \begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x + \frac{3}{2} \cdot y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ -2x + \frac{27}{8} \cdot x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x\left(\frac{27}{8} \cdot x^3 - 2\right) = 0 \end{cases}$, la seconda equazione è soddisfatta per $x = 0$ oppure per $x = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$, due punti critici $O(0,0)$ e $A\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 3y \end{bmatrix}; \; |\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 3y \end{vmatrix} = 18xy - 4.$

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = \,-4 < 0$. O è punto di sella.

$|\mathcal{H}f(A)| = 12 > 0,\; f''_{xx}(A) = 4\sqrt[3]{2} > 0$. A è punto di minimo relativo.