

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

6 febbraio 2023

Compito $\mathbb{F}1$ ✓

- 1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q \circ (p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow \neg(p \circ q)$.
- 2) (7 punti) Sia $f(x) = e^{3x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = 2 + \operatorname{sen} x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:
 - i. $C.E. = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
 - ii. asintoto verticale di equazione $x = -1$;
 - iii. asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = -2$;
 - iiii. punto di minimo assoluto di coordinate $(1; -3)$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen} x}{x^2 + 3x}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{6x - 2}\right)^{3x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^{-x}}{1 + x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot e^x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = -3$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.
- 8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + 6x - 8y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-3, -1)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

6 febbraio 2023

Compito $\mathbb{F}2$ ✓

- 1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\neg q \Leftrightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow (p \vee q)$.
- 2) (7 punti) Sia $f(x) = \sqrt{1-x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = \cos x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:
 - i. $C.E. = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
 - ii. asintoto verticale di equazione $x = 1$;
 - iii. asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 1$;
 - iiii. punto di massimo assoluto di coordinate $(-1; 3)$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen} x}{x^2 - 5x}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x + 12}\right)^{-2x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^x}{3-x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_e^{e^2} \frac{2 + \log x}{x \cdot \log x} dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot \operatorname{sen} x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = -1$ e $y''(0) = 4$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.
- 8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = \alpha x^2 + 4y^2 + 2x - 8y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-3, 1)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

6 febbraio 2023

Compito $\mathbb{F}3$ ✓

- 1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q \vee \neg(p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow (p \circ q)$.
- 2) (7 punti) Sia $f(x) = \sqrt{2-x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = \sin x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:
 - i. $C.E. = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
 - ii. asintoto verticale di equazione $x = 2$;
 - iii. asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 2$;
 - iiii. punto di minimo assoluto di coordinate $(-1; -2)$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2 + 3x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+6}\right)^{8x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^{1+x}}{x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{4 - \log x}}{x} dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot e^{2x}$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = 2$ e $y''(0) = 6$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.
- 8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \alpha x - 16y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(3, 4)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

6 febbraio 2023

Compito $\mathbb{F}4$ [✓]

- 1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.
- 2) (7 punti) Sia $f(x) = e^{-2x}$, se risulta la funzione composta $f(g(x)) = 3 - \cos x$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e calcolare le espressioni delle funzioni composte $g(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:
 - i.* $C.E. = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;
 - ii.* asintoto verticale di equazione $x = -2$;
 - iii.* asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 3$;
 - iiii.* punto di minimo assoluto di coordinate $(2; 2)$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{5x^2 + x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{6x + 5}\right)^x$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^{2-x}}{x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_e^{e^2} \frac{1 + \log^2 x}{x} dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per sostituzione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot x + b \cdot \cos x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che $y'(0) = -2$ e $y''(0) = 2$, e calcolare il polinomio di McLaurin di secondo grado della funzione.
- 8) (8 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = -x^2 + 4y^2 - 8x + \alpha y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-4, -1)$. Dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

6 febbraio 2023

Compito $\mathbb{F}5$ ✓

- 1) (6 punti) Siano I_1 e I_2 due intervalli con $I_1 = [-2; 2]$ e $I_2 = [0; 4]$; sia inoltre I_3 un intervallo tale per cui $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [-5; 4]$ e $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = [0; 1[$. Determinare l'intervallo I_3 e calcolare l'insieme frontiera dell'unione fra I_1 e I_3 , $\delta(I_1 \cup I_3)$, e l'insieme derivato dell'intersezione fra I_2 e I_3 , $D(I_2 \cap I_3)$.
- 2) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = \log x$; risolvere la disequazione $g(f(x)) > -1$.
- 3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione f che soddisfa le seguenti tre definizioni di limite:
 1. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: 0 < |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) > \epsilon$;
 2. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: x > \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) < -\epsilon$;
 3. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: x < -\delta_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sen } x} - 1}{x + \text{sen } x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{-2x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^{x^2}}{x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_1^e (x + \log x) dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per parti)
- 7) (7 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di terzo grado della funzione di equazione $y = x \cdot \text{sen } x + \cos x$.
- 8) (8 punti) Studiare la natura dei punti critici della funzione
$$f(x, y) = x^3 - 2xy + \frac{1}{2} \cdot y^3$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.