Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

29 maggio 2023

Compito Unico

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità della proposizione composta $\neg(q\ e\ r) \Rightarrow (\neg p\ o\ \neg r)$, sapendo che la proposizione composta $p \Rightarrow q$ e la proposizione composta $r \Leftrightarrow q$ sono entrambe false.

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $p \Rightarrow q$ è falsa, p è vera e q è falsa; se $r \Leftrightarrow q$ è falsa, r è necessariamente vera perchè q è falsa. Di conseguenza $q\ e\ r$ è falsa e $\neg(q\ e\ r)$ è vera, mentre $\neg p$ e $\neg r$ sono entrambe false, quindi anche $\neg p\ o\ \neg r$ è falsa; in conclusione abbiamo che l'implicazione $\neg(q\ e\ r) \Rightarrow (\neg p\ o\ \neg r)$ è falsa.

SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Leftrightarrow q$	$\neg(q\ e\ r)$	$\neg p\ o\ \neg r$	$\neg(q\ e\ r) \Rightarrow (\neg p\ o\ \neg r)$
V	V	V	V	V			
V	V	F	V	F			
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
V	F	F	F	V			.
F	V	V	V	V			
F	V	F	V	F			
F	F	V	V	F			
F	F	F	V	V			

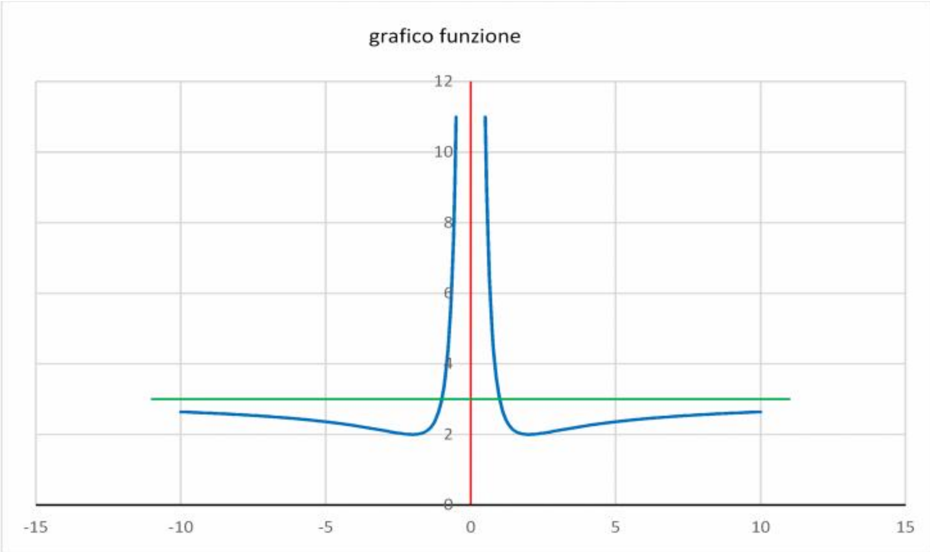
Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove la proposizione composta $p \Rightarrow q$ e la proposizione composta $r \Leftrightarrow q$ sono entrambe false, come evidenziato in grassetto, nell'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste, la proposizione composta $\neg(q\ e\ r) \Rightarrow (\neg p\ o\ \neg r)$ è falsa.

2) (8 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: (x+1)(x-3) < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \le 4\}$. Calcolare gli insiemi $A \cap B$ e $A \backslash B$ ed indicare se tali insiemi sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: (x+1)(x-3) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 3\} =]-1;3[$.
$B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \le 4\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \le 2^2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \le 2\} =]-\infty;2]$.
$A \cap B =]-1;3[\cap]-\infty;2] =]-1;2]$, insieme né aperto né chiuso.
$A \backslash B =]-1;3[\Big\backslash]-\infty;2] =]2;3[$, insieme aperto.

3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:
$i.$ $C.E. = \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
$ii.$ grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (funzione pari);
$iii.$ asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 3$;
$iiii.$ punto di minimo assoluto di coordinate $(2;2)$.

3) Di seguito il grafico di una funzione che presenta le caratteristiche richieste (in verde l'asintoto orizzontale).



.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+x^2)}$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3x^2-log\,x}{6x-x^2+2\,log\,x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1+2x^2)}{2x^2} \cdot 2}{\frac{log(1+x^2)}{x^2}} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1)} = 2.$

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, x e $log\,x$ sono o-piccoli di $3x^2$, così come $6x$ e $2\,log\,x$ sono o-piccoli di x^2, quindi

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3x^2-log\,x}{6x-x^2+2\,log\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+o(3x^2)}{-x^2+o(x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = -3.$

Il primo limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+x^2)} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4\cancel{x}^2}{1+2x^2}}{\frac{2\cancel{x}}{1+x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot (1+x^2)}{1+2x^2} =$

$\frac{2 \cdot (\to 1)}{(\to 1)} = 2.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^x}{x^2}$.

(Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione non presenta punti di flesso)

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R} \backslash \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{e^{-x}}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}$, quantità diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ in quanto sia e^x che x^2 sono quantità positive. Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{(\to -\infty)}}{(\to +\infty)} = \frac{(\to 0)}{(\to +\infty)} = 0$; $AOrSx$ di equazione $y = 0$.

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x^2} = \frac{(\to 1)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AV di equazione $x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x^2 = o(e^x)$; tale limite può essere risolto anche ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital infatti:

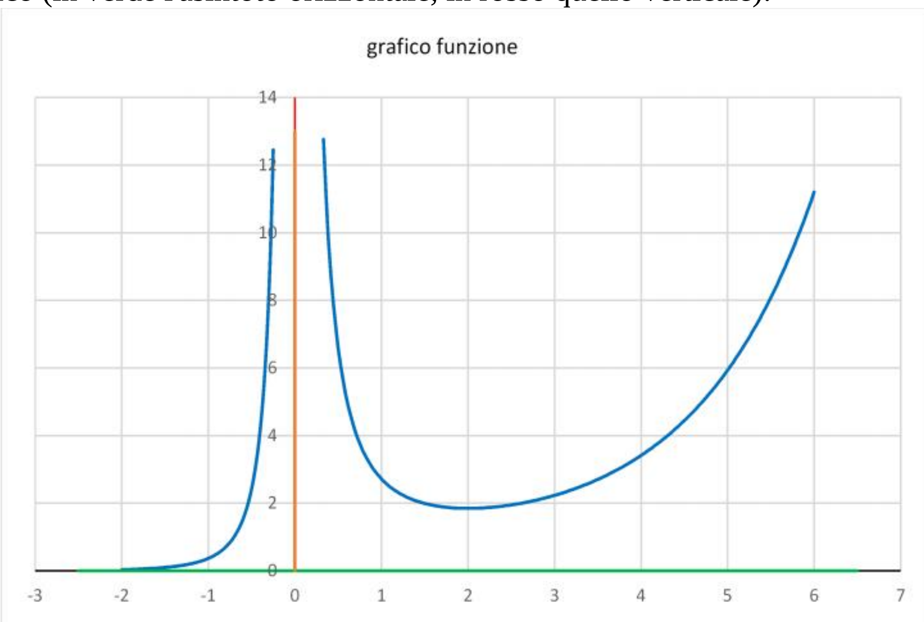
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ - $FI \overset{H}{\Rightarrow}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x^3 = o(e^x)$; anche in questo caso il limite può essere risolto ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(x-2)e^x}{x^4}$. $y' > 0$ se $x(x-2) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 0[$ e in $[2, +\infty[$, strettamente decrescente in $]0, 2]$; punto di minimo relativo per $x = 2$, con $y(2) = e^2/4$.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto orizzontale e di quello verticale, insieme al minimo relativo ed alla non esistenza di punti di flesso, implicano che la funzione è strettamente convessa sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale, in rosso quello verticale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^{2\pi} (2x \cdot (\cos x + \operatorname{sen} x))\, dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per parti)

6) Posto $\cos x + \operatorname{sen} x$ come fattore differenziale e $2x$ come fattore finito, calcoliamo con il metodo di integrazione per parti la primitiva della funzione integranda:

$\int (2x \cdot (\cos x + \operatorname{sen} x))\, dx = 2x \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x) + - \int (2 \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x))\, dx = 2x \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x) + 2 \cdot (\cos x + \operatorname{sen} x) + c = 2 \cdot ((x+1) \operatorname{sen} x - (x-1) \cos x) + c$. Veniamo adesso all'integrale definito:

$$\int_0^{2\pi}(2x\cdot(cos\,x+sen\,x))\,dx\;=\;(2\cdot((x+1)\,sen\,x-(x-1)\,cos\,x))_0^{2\pi}\;=$$
$2\cdot((2\pi+1)\,sen\,2\pi-(2\pi-1)\,cos\,2\pi)-2\cdot(sen\,0+cos\,0)=$
$2\cdot(-2\pi+1)-2\cdot1=-4\pi.$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y=x^3-6x+5$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2;2]$ e calcolare i punti nei quali il Teorema è soddisfatto.

7) La funzione proposta è un polinomio, funzione continua e derivabile nell'intervallo $[-2;2]$; il Teorema è applicabile. $y(-2)=(-2)^3-6\cdot(-2)+5=9$, $y(2)=2^3-6\cdot2+5=1$, $\dfrac{y(2)-y(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{1-9}{4}=-2$, $y'=3x^2-6$. Per determinare i punti che soddisfano il Teorema dobbiamo andare a risolvere l'equazione $y'=\dfrac{y(2)-y(-2)}{2-(-2)}$ ovvero $3x^2-6=-2$ da cui $3x^2=4$ e quindi $x^2=\dfrac{4}{3}$ con $x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. Entrambe le soluzioni appartengono all'intervallo $[-2;2]$, quindi sono entrambe accettabili.

8) (7 punti) Calcolare e determinare la natura dell'unico punto critico della funzione a due variabili $f(x,y)=x^2+y^2-3xy+4y$.

8) $\nabla f=(2x-3y,2y-3x+4)$.

$$FOC\colon\begin{cases}2x-3y=0\\2y-3x+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}y\\2y-\frac{9}{2}y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}y\\-5y+8=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\begin{cases}x=\frac{12}{5}\\y=\frac{8}{5}\end{cases}$, unico punto critico $P\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{8}{5}\right)$.

$\mathcal{H}f=\begin{bmatrix}2&-3\\-3&2\end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f|=4-9=-5$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P)|=-5<0$. P punto di sella.