

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

29 maggio 2023

Compito Unico ✓

- 1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità della proposizione composta $\neg(q \wedge r) \Rightarrow (\neg p \vee \neg r)$, sapendo che la proposizione composta $p \Rightarrow q$ e la proposizione composta $r \Leftrightarrow q$ sono entrambe false.
- 2) (8 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: (x+1)(x-3) < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \leq 4\}$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $A \setminus B$ ed indicare se tali insiemi sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi.
- 3) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione che presenti le seguenti caratteristiche:
 - i. $C.E. = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 - ii. grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (funzione pari);
 - iii. asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) di equazione $y = 3$;
 - iiii. punto di minimo assoluto di coordinate $(2; 2)$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x^2)}{\log(1+x^2)}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3x^2 - \log x}{6x - x^2 + 2 \log x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^x}{x^2}$.
(Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione non presenta punti di flesso)
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_0^{2\pi} (2x \cdot (\cos x + \sin x)) dx$. (Suggerimento: si consiglia di utilizzare il metodo di integrazione per parti)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = x^3 - 6x + 5$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2; 2]$ e calcolare i punti nei quali il Teorema è soddisfatto.
- 8) (7 punti) Calcolare e determinare la natura dell'unico punto critico della funzione a due variabili $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 4y$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.