Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

26 giugno 2023

Compito Unico

1) (7 punti) Siano A, B e C i seguenti tre insiemi:

1. A è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano, $A = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\}$;
2. B è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese, $B = \{a, b, c, \ldots, j, k, ..., w, x, y, z\}$;
3. C è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano, $C = \{a, e, i, o, u\}$.

Determinare i seguenti tre insiemi: $(A \cap B)\backslash C$, $(B \cup C)\backslash A$ e $(C\backslash A) \cap B$.
(Con $X\backslash Y$ indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme X e l'insieme Y)

1) Per i tre insiemi proposti vale $C \subset A \subset B$ quindi $A \cap B = A$, $B \cup C = B$ e $C\backslash A = \emptyset$, ne segue che:

1. $(A \cap B)\backslash C = A\backslash C = \{b, c, d, \ldots, t, v, z\}$ insieme delle sedici consonanti dell'alfabeto italiano;

2. $(B \cup C)\backslash A = B\backslash A = \{j, k, w, x, y\}$ insieme delle cinque lettere presenti nell'alfabeto inglese, ma non in quello italiano;

3. $(C\backslash A) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$.

2) (8 punti) Siano date le funzioni $f(x) = e^{1-3x}$, $g(x) = x^3 - 1$ e sia $h(x)$ la funzione composta $h(x) = g(f(x))$. Determinare le espressioni delle funzioni inverse $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ e $h^{-1}(x)$.

2) $h(x) = g(f(x)) = g(e^{1-3x}) = \left(e^{1-3x}\right)^3 - 1 = e^{3-9x} - 1$. Per determinare l'inversa di ogni funzione dobbiamo ricavare la variabile x in funzione della variabile y; iniziamo con la funzione f, posto $y = e^{1-3x}$ otteniamo $log\, y = 1 - 3x$ da cui $x = \frac{1}{3}(1 - log\, y)$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(1 - log\, x)$; per la funzione g posto $y = x^3 - 1$ si ha $y + 1 = x^3$ da cui $x = \sqrt[3]{y+1}$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$; infine per la funzione h da $y = e^{3-9x} - 1$ risulta $y + 1 = e^{3-9x}$ con $log(y+1) = 3 - 9x$ da cui $x = \frac{1}{9}(3 - log(y+1))$, $h^{-1}(x) = \frac{1}{9}(3 - log(x+1))$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \le 1 \\ ax + 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$. Determinare il valore del parametro a che rende la funzione continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ e disegnare il grafico della funzione ottenuta.

3) La funzione proposta è chiaramente continua $\forall x \neq 1$, nel punto $x = 1$ è continua se e solo se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$; per quanto riguarda il limite destro risulta $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 2 = 3$ mentre per il limite sinistro abbiamo $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ax + 2 = a + 2$. La funzione è quindi continua in tutto l'insieme $\mathbb{R}$ se e solo se $a + 2 = 3$ ovvero $a = 1$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \le 1 \\ x + 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$. Nella pagina successiva il grafico della funzione:

.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x^2)}{sen\, x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{x^2}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x^2)}{sen\, x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1+x^2)}{x^2}}{\frac{sen\, x^2}{x^2}} = \frac{(\to 1)}{(\to 1)} = 1.$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{x^2} = e^2.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

5) $C.E.$: $1+x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} = y(x)$. Funzione pari, la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0$ da cui $x^2 < 1$ e quindi $0 \leq x < 1$; funzione positiva in $[0,1[$, negativa in $]1,+\infty[$, intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(1,0)$; $y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{(\to -1)}{(\to 1)} =$$

-1; AOr di equazione $y = -1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$.

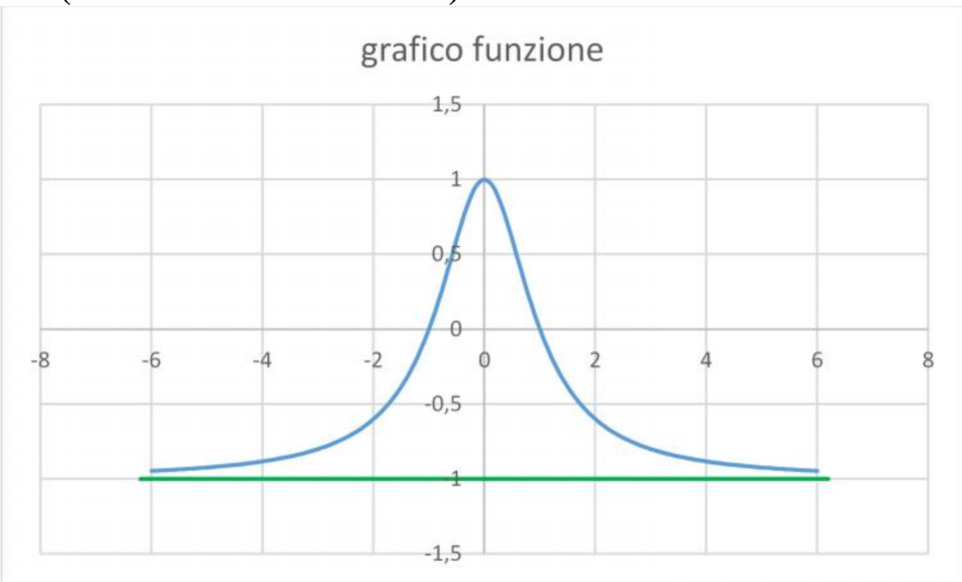
$y' < 0\ \forall x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0,+\infty[$; punto di massimo assoluto per $x = 0$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{-4(1+x^2)^2-(-4x)\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$

$$\frac{-4(1+x^2)^2+16x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{4\cancel{(1+x^2)}(4x^2-(1+x^2))}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$\dfrac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. $y'' > 0$ se $3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1/3$ ovvero $x > \sqrt{1/3}$. Funzione strettamente concava in $[0, \sqrt{1/3}]$, strettamente convessa in $[\sqrt{1/3}, +\infty[$; punto di flesso $F\left(\sqrt{1/3}, 1/2\right)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^4 \left(3x + 5 - \frac{2}{x}\right) dx$.

6) $\displaystyle\int_1^4 \left(3x + 5 - \frac{2}{x}\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + 5x - 2\,log\,|x|\right)_1^4 =$

$\displaystyle(24 + 20 - 2\,log\,4) - \left(\frac{3}{2} + 5 - 2\,log\,1\right) = \frac{75}{2} - 2\,log\,4$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = a \cdot cos\,x + b \cdot sen\,x$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x_0 = 0$ ha equazione $y = 1 - 3x$.

7) Dall'equazione della retta tangente ricaviamo che $y(0) = 1$ e $y'(0) = -3$; in particolare $y(0) = a \cdot cos\,0 + b \cdot sen\,0 = a$, quindi $a = 1$ e $y'(x) = -a \cdot sen\,x + b \cdot cos\,x$ con $y'(0) = -a \cdot sen\,0 + b \cdot cos\,0 = b$, da cui $b = -3$.

8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione $f(x, y, z) = \left(x - z^2\right) \cdot e^{3y - x^2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$.

$$f'_x = 1 \cdot e^{3y-x^2} + (x - z^2) \cdot e^{3y-x^2} \cdot (-2x) = (1 - 2x^2 + 2xz^2) \cdot e^{3y-x^2};$$
$$f'_y = (x - z^2) \cdot e^{3y-x^2} \cdot 3 = 3(x - z^2) \cdot e^{3y-x^2}; \quad f'_z = -2z \cdot e^{3y-x^2}.$$