

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

26 giugno 2023

Compito Unico ✓

- 1) (7 punti) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  i seguenti tre insiemi:
1.  $A$  è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano,  $A = \{a, b, c, \dots, u, v, z\}$ ;
  2.  $B$  è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese,  $B = \{a, b, c, \dots, j, k, \dots, w, x, y, z\}$ ;
  3.  $C$  è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano,  $C = \{a, e, i, o, u\}$ .
- Determinare i seguenti tre insiemi:  $(A \cap B) \setminus C$ ,  $(B \cup C) \setminus A$  e  $(C \setminus A) \cap B$ .  
(Con  $X \setminus Y$  indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme  $X$  e l'insieme  $Y$ )
- 2) (8 punti) Siano date le funzioni  $f(x) = e^{1-3x}$ ,  $g(x) = x^3 - 1$  e sia  $h(x)$  la funzione composta  $h(x) = g(f(x))$ . Determinare le espressioni delle funzioni inverse  $f^{-1}(x)$ ,  $g^{-1}(x)$  e  $h^{-1}(x)$ .
- 3) (6 punti) Sia data la funzione  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$ . Determinare il valore del parametro  $a$  che rende la funzione continua su tutto l'insieme  $\mathbb{R}$  e disegnare il grafico della funzione ottenuta.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+2}{x^2} \right)^{x^2}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione  $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_1^4 \left( 3x + 5 - \frac{2}{x} \right) dx$ .
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione  $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ . Determinare i valori dei parametri  $a$  e  $b$  sapendo che la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa  $x_0 = 0$  ha equazione  $y = 1 - 3x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione  $f(x, y, z) = (x - z^2) \cdot e^{3y-x^2}$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.