Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

28 agosto 2023

Compito $\mathbb{A}1$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\neg p\ o\ \neg q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q)\ o\ q)$.

1)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p\ o\ \neg q$	$(p \Leftrightarrow q)\ o\ q$	$(\neg p\ o\ \neg q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q)\ o\ q)$
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

.

2) (7 punti) Determinare il Campo di Esistenza della funzione di equazione $y = log(1 - log\, x)$; dopo aver determinato il suo Campo di Esistenza determinare le equazioni dei suoi eventuali asintoti.

2) Per determinare il campo di esistenza della funzione dobbiamo porre l'argomento del logaritmo maggiore di zero; $1 - log\, x > 0$ ovvero $log\, x < 1$ da cui $0 < x < e$ (ricordiamo che ogni logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è maggiore di zero), $C.E. =]0, e[$. per lo studio di eventuali asintoti calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del suo campo di esistenza:

$\lim\limits_{x \to 0^+} log(1 - log\, x) = log(1 - (\to -\infty)) = log(\to +\infty) = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$;

$\lim\limits_{x \to e^-} log(1 - log\, x) = log(1 - (\to 1^-)) = log(\to 0^+) = -\infty$, asintoto verticale di equazione $x = e$.

3) (6 punti) Siano dati i vettori $V = (k \quad k \quad k)$ e $W = (k \quad -k \quad 0)$ dipendenti dal parametro reale k; sia Z il vettore $Z = V - 2W$. Determinare i valori del parametro k per i quali risulta che il vettore Z presenta modulo pari a $4\sqrt{11}$.

3) $Z = V - 2W = (k \quad k \quad k) - 2(k \quad -k \quad 0) = (-k \quad 3k \quad k)$, passiamo adesso a calcolare il modulo del vettore Z: $||Z|| = \sqrt{(-k)^2 + (3k)^2 + k^2} = \sqrt{11k^2}$; per determinare i valori di k poniamo $\sqrt{11k^2} = 4\sqrt{11} \Leftrightarrow 11k^2 = 176 \Leftrightarrow k^2 = 16$ da cui $k = \pm 4$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - tg(-x)}{4x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1+x}}{2 - \sqrt{4+x}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - tg(-x)}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{tg\, x}{x} + \dfrac{tg(-x)}{-x}\right) = \dfrac{1}{4}((\to 1) + (\to 1)) = \dfrac{1}{2}$; o alternativamente ricordando che $tg(-x) = -tg\, x$ si ha:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - tg(-x)}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x + tg\, x}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{tg\, x}{x} = \dfrac{1}{2} \cdot (\to 1) = \dfrac{1}{2}$.

Il limite proposto può essere risolto anche con l'utilizzo del Teorema di De L'Hopital infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - tg(-x)}{4x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI, utilizzando il teorema otteniamo:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - tg(-x)}{4x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + tg^2\, x - (1 + tg^2(-x)) \cdot (-1)}{4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + tg^2\, x + tg^2(-x)}{4} = \dfrac{2 + (\to 0) + (\to 0)}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Il secondo limite può essere risolto in tre modi distinti; *PRIMO METODO; con la tecnica della razionalizzaione*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{2-\sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{2-\sqrt{4+x}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+x}}{2+\sqrt{4+x}}\cdot\frac{2+\sqrt{4+x}}{1+\sqrt{1+x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{4-(4+x)}\cdot\frac{2+\sqrt{4+x}}{1+\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}}{-\cancel{x}}\cdot\frac{2+\sqrt{4+x}}{1+\sqrt{1+x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+\sqrt{4+x}}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{(\to 4)}{(\to 2)} = 2\,.$$

SECONDO METODO, attraverso i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{2-\sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\left(\sqrt{1+x/4}-1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{(1+x)^{1/2}-1}{\frac{(1+x/4)^{1/2}-1}{x/4}} = 2\cdot\frac{(\to 1/2)}{(\to 1/2)} = 2\,.$$

TERZO METODO, con l'utilizzo del Teorema di De L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{2-\sqrt{4+x}} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}\ FI;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{2-\sqrt{4+x}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{4+x}}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{(\to 2)}{(\to 1)} = 2\,.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{1-x} - e^{1+x}$.

5) $C.E.$: nessuna condizione da imporre; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{1-(-x)} - e^{1+(-x)} = e^{1+x} - e^{1-x} = -\left(e^{1-x} - e^{1+x}\right) = -y(x)$. Funzione dispari, la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $e^{1-x} - e^{1+x} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} > e^{1+x} \Rightarrow 1-x > 1+x$ da cui $2x < 0$ e quindi $x < 0$; funzione negativa in $]0, +\infty[$; $y(0) = e - e = 0$. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{1-x} - e^{1+x} = e^{(\to -\infty)} - e^{(\to +\infty)} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty;$$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{1-x} - e^{1+x}}{x} = -\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x = o\left(e^{1+x}\right)$. La funzione non presenta asintoti.

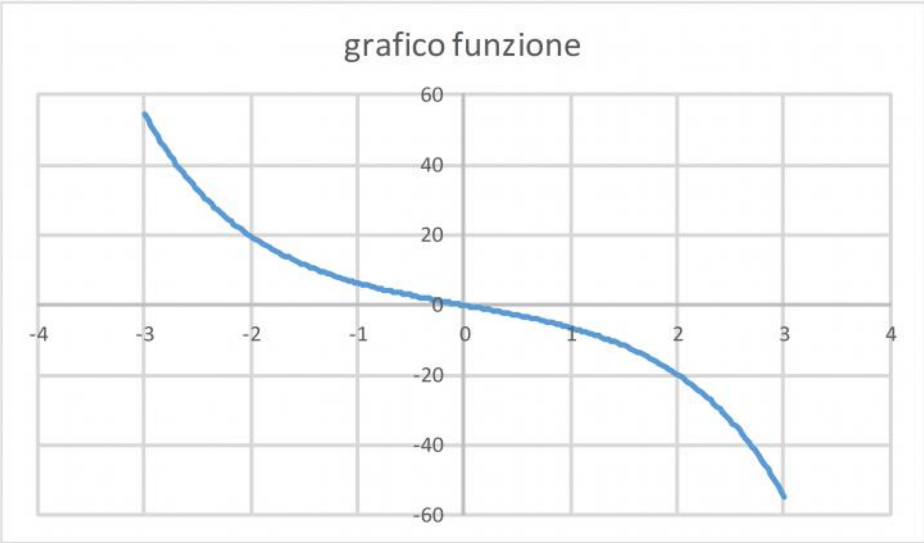
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1-x}\cdot(-1) - e^{1+x} = -\left(e^{1-x} + e^{1+x}\right)$.

$y' < 0\ \forall x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = -\left(e^{1-x}\cdot(-1) + e^{1+x}\right) = e^{1-x} - e^{1+x} = y$.

$y'' < 0\ \forall x > 0$. Funzione strettamente concava in $[0, +\infty[$; punto di flesso $O(0,0)$.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos x}{1+x+\operatorname{sen} x}\right)dx$.

6) $\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos x}{1+x+\operatorname{sen} x}\right)dx = \int_0^{\pi}\frac{d(1+x+\operatorname{sen} x)}{1+x+\operatorname{sen} x} = (\log|1+x+\operatorname{sen} x|)_0^{\pi}$
$(\log|1+\pi+\operatorname{sen}\pi|) - (\log|1+0+\operatorname{sen} 0|) = \log(1+\pi)-\log 1 =$
$\log(1+\pi)$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=-1$ e $g'(0)=1$. Sia inoltre h la funzione $h(x)=f(x)+f(g(x))$; determinare $h(0)$, $h'(0)$ e l'equazione della retta tangente al grafico della funzione h nel punto di ascissa $x_0=0$.

7) $h(0)=f(0)+f(g(0))=f(0)+f(0)=2f(0)=0$;
$h'(x)=f'(x)+f'(g(x))\cdot g'(x)$;
$h'(0)=f'(0)+f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(0)+f'(0)\cdot g'(0)=f'(0)\cdot(1+g'(0))=$
$-1\cdot(1+1)=-2$;
equazione della retta tangente nel punto $x_0=0$: $y=-2x$.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie $z=f(x,y,v,w)=xy+vw$ nel punto di coordinate $P(1,1,-1,-1)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z-z(P)=\nabla z(P)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\v+1\\w+1\end{pmatrix}$.

$z(P)=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=2$, $\nabla z=(y,x,w,v)$, $\nabla z(P)=(1,1,-1,-1)$.
Equazione del piano tangente: $z-2=x-1+y-1-(v+1)-(w+1)$, oppure $x+y-v-w-z=2$.