Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

12 settembre 2023

Compito $\mathbb{S}1$

1) (6 punti) Siano A, B e C i seguenti tre insiemi:
 1. A è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano, $A = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\}$;
 2. B è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese,
 $B = \{a, b, c, \ldots, i, j, k, l, \ldots, w, x, y, z\}$;
 3. C è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano, $C = \{a, e, i, o, u\}$.
 Determinare i seguenti tre insiemi: $A \cap B \cap C$, $(A \backslash B) \cap C$ e $(B \backslash C) \cup A$.
 (Con $X \backslash Y$ indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme X e l'insieme Y)

1) Per i tre insiemi proposti vale $C \subset A \subset B$ quindi $A \backslash B = \emptyset$ e $A \cup B = B$, ne segue che:

 1. $A \cap B \cap C = C = \{a, e, i, o, u\}$ insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano;

 2. $(A \backslash B) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset$;

 3. il terzo insieme merita un po' più di attenzione; da $C \subset A$ si ha $(B \backslash C) \cup A = B \cup A = B = \{a, b, c, \ldots, i, j, k, l, \ldots, w, x, y, z\}$ insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese.

2) (7 punti) Consideriamo le funzioni $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = 3x - 1$; siano $h(x)$ e $k(x)$ le funzioni composte $h(x) = g(1 + f(x))$ e $k(x) = f(g(1 - x))$. Determinare le espressioni delle funzioni $h(x)$ e $k(x)$; dopo aver determinato le espressioni delle due funzioni composte, risolvere la disequazione $h(x) > k(x)$.

2) $h(x) = g(1 + f(x)) = g(1 + 3^x - 1) = g(3^x) = 3 \cdot 3^x - 1 = 3^{x+1} - 1$;
 $k(x) = f(g(1 - x)) = f(3(1 - x) - 1) = f(2 - 3x) = 3^{2-3x} - 1$. Passiamo adesso a risolvere la disequazione: $h(x) > k(x)$ equivale a $3^{x+1} - 1 > 3^{2-3x} - 1$ da cui $3^{x+1} > 3^{2-3x}$ e quindi $x + 1 > 2 - 3x$ vera per $x > 1/4$.

3) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \vee x \geq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$. Determinare l'insieme frontiera dell'intersezione fra A e B, $\delta(A \cap B)$; e l'insieme chiusura dell'unione fra A e B, $\overline{A \cup B}$.

3) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4\} =]-\infty, -4]$; $\delta(A \cap B) = \{-4\}$.
 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \vee x \geq 4\} =]-\infty, 3[\cup [4, +\infty[$;
 $\overline{A \cup B} =]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tg\, x}{1 - cos\, x}$; $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 8}{2x} \right)^{1 + \frac{1}{x}}$.

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tg\, x}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg\, x}{x}}{\frac{1 - cos\, x}{x^2}} = \frac{(\to 1)}{(\to 1/2)} = 2.$

 Il limite proposto può essere risolto anche con l'utilizzo del Teorema di De L'Hopital infatti $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tg\, x}{1 - cos\, x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI, utilizzando il teorema otteniamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tg\, x}{1 - cos\, x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x + x(1 + tg^2\, x)}{sen\, x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}\ FI \overset{H}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + tg^2\, x + 1 + tg^2\, x + x \cdot 2\, tg\, x \cdot (1 + tg^2\, x)}{cos\, x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1+tg^2 x)(1+x\,tg\,x)}{cos\,x} = \frac{(\to 2)}{(\to 1)} = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-8}{2x}\right)^{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} = \left(\to \frac{3}{2}\right)^{(\to 1)} = \frac{3}{2}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{1+x} + e^{1-x}$.

5) $C.E.$: nessuna condizione da imporre; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{1+(-x)} + e^{1-(-x)} = e^{1-x} + e^{1+x} = y(x)$.

Funzione pari, la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x \geq 0$ in quanto somma di due esponenziali. $y(0) = 2e$, unica intersezione con gli assi nel punto $A(0, 2e)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{1+x} + e^{1-x} = e^{(\to +\infty)} + e^{(\to -\infty)} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty;$$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{x} = +\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^{1+x})$. La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1+x} + e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1+x} - e^{1-x}$.

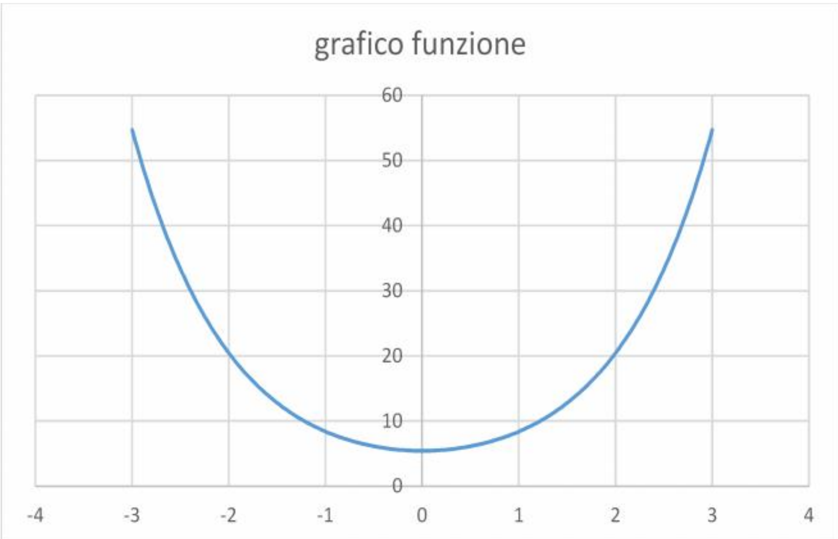
$y' > 0$ se $e^{1+x} - e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow e^{1+x} > e^{1-x}$ da cui $1 + x > 1 - x$ vera se $x > 0$.

Funzione strettamente crescente in $[0, +\infty[$. Il punto $A(0, 2e)$ è punto di minimo assoluto per la funzione.

Concavità e convessità: $y'' = e^{1+x} - e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1+x} + e^{1-x} = y$.

$y'' > 0\ \forall x \geq 0$. Funzione strettamente convessa in $[0, +\infty[$; nessun punto di flesso.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \left(x^2 - x - \frac{1}{x+1}\right) dx$.

6) $$\int_0^3 \left(x^2 - x - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - log|x+1|\right)_0^3 =$$

$$\left(9 - \frac{9}{2} - log\,4\right) - 0 = \frac{9}{2} - log\,4.$$

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $g'(0) = -1$. Sia inoltre h la funzione $h(x) = f(x) + g(g(x))$; determinare $h(0)$, $h'(0)$ e l'equazione della retta tangente al grafico della funzione h nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

7) $h(0) = f(0) + g(g(0)) = f(0) + g(0) = 0$;

$h'(x) = f'(x) + g'(g(x)) \cdot g'(x)$;

$h'(0) = f'(0) + g'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) + g'(0) \cdot g'(0) = f'(0) + (g'(0))^2 = 1 + (-1)^2 = 2$;

equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 0$: $y = 2x$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione

$f(x,y) = 3x^2 - 2y^3 + 24y$.

8) $\nabla f = (6x, -6y^2 + 24)$.

FOC: $\begin{cases} 6x = 0 \\ -6y^2 + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(0, \pm 2)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12y \end{vmatrix} = -72y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = -144 < 0$. P_1 è punto di sella;

$|\mathcal{H}f(P_2)| = 144 > 0,\ f''_{xx}(P_2) = 6 > 0$. A è punto di minimo.