

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

12 settembre 2023

Compito S1✓

- 1) (6 punti) Siano A , B e C i seguenti tre insiemi:
1. A è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano, $A = \{a, b, c, \dots, u, v, z\}$;
 2. B è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese,
 $B = \{a, b, c, \dots, i, j, k, l, \dots, w, x, y, z\}$;
 3. C è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano, $C = \{a, e, i, o, u\}$.
- Determinare i seguenti tre insiemi: $A \cap B \cap C$, $(A \setminus B) \cap C$ e $(B \setminus C) \cup A$.
(Con $X \setminus Y$ indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme X e l'insieme Y)
- 2) (7 punti) Consideriamo le funzioni $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = 3x - 1$; siano $h(x)$ e $k(x)$ le funzioni composte $h(x) = g(1 + f(x))$ e $k(x) = f(g(1 - x))$. Determinare le espressioni delle funzioni $h(x)$ e $k(x)$; dopo aver determinato le espressioni delle due funzioni composte, risolvere la disequazione $h(x) > k(x)$.
- 3) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \vee x \geq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$. Determinare l'insieme frontiera dell'intersezione fra A e B , $\delta(A \cap B)$; e l'insieme chiusura dell'unione fra A e B , $\overline{A \cup B}$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 8}{2x} \right)^{1 + \frac{1}{x}}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{1+x} + e^{1-x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_0^3 \left(x^2 - x - \frac{1}{x+1} \right) dx$.
- 7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $g'(0) = -1$. Sia inoltre h la funzione $h(x) = f(x) + g(g(x))$; determinare $h(0)$, $h'(0)$ e l'equazione della retta tangente al grafico della funzione h nel punto di ascissa $x_0 = 0$.
- 8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3 + 24y$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.