

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

12 settembre 2023

Compito S1✓

- 1) (6 punti) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  i seguenti tre insiemi:
1.  $A$  è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano,  $A = \{a, b, c, \dots, u, v, z\}$ ;
  2.  $B$  è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese,  
 $B = \{a, b, c, \dots, i, j, k, l, \dots, w, x, y, z\}$ ;
  3.  $C$  è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano,  $C = \{a, e, i, o, u\}$ .
- Determinare i seguenti tre insiemi:  $A \cap B \cap C$ ,  $(A \setminus B) \cap C$  e  $(B \setminus C) \cup A$ .  
(Con  $X \setminus Y$  indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme  $X$  e l'insieme  $Y$ )
- 2) (7 punti) Consideriamo le funzioni  $f(x) = 3^x - 1$  e  $g(x) = 3x - 1$ ; siano  $h(x)$  e  $k(x)$  le funzioni composte  $h(x) = g(1 + f(x))$  e  $k(x) = f(g(1 - x))$ . Determinare le espressioni delle funzioni  $h(x)$  e  $k(x)$ ; dopo aver determinato le espressioni delle due funzioni composte, risolvere la disequazione  $h(x) > k(x)$ .
- 3) (6 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \vee x \geq 4\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$ . Determinare l'insieme frontiera dell'intersezione fra  $A$  e  $B$ ,  $\delta(A \cap B)$ ; e l'insieme chiusura dell'unione fra  $A$  e  $B$ ,  $\overline{A \cup B}$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x - 8}{2x} \right)^{1 + \frac{1}{x}}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione  $y = e^{1+x} + e^{1-x}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_0^3 \left( x^2 - x - \frac{1}{x+1} \right) dx$ .
- 7) (7 punti) Siano date le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  con  $f(0) = g(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  e  $g'(0) = -1$ . Sia inoltre  $h$  la funzione  $h(x) = f(x) + g(g(x))$ ; determinare  $h(0)$ ,  $h'(0)$  e l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $h$  nel punto di ascissa  $x_0 = 0$ .
- 8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione  $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3 + 24y$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.