Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

3 ottobre 2023

Compito $\mathbb{O}1$

1) (6 punti) Siano A, B e C i seguenti tre insiemi:
   1. A è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano, $A = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\}$;
   2. B è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese, $B = \{a, b, c, \ldots, i, j, k, l, \ldots, w, x, y, z\}$;
   3. C è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano, $C = \{a, e, i, o, u\}$.

   Determinare i seguenti tre insiemi: $A \cup B \cup C$, $(A \cup C)\backslash B$ e $(A\backslash C) \cup B$.
   (Con $X\backslash Y$ indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme X e l'insieme Y)

1) Per i tre insiemi proposti vale $C \subset A \subset B$ quindi $A \cup C = A$ e $A \cup B = B$, ne segue che:
   1. $A \cup B \cup C = B = \{a, b, c, \ldots, i, j, k, l, \ldots, w, x, y, z\}$ insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese;
   2. $(A \cup C)\backslash B = A\backslash B = \emptyset$, in quanto $A \subset B$;
   3. il terzo insieme merita un po' più di attenzione; da $A \subset B$ si ha $B \subseteq (A\backslash C) \cup B \subseteq A \cup B = B$, quindi $(A\backslash C) \cup B = B$.

2) (8 punti) Consideriamo le funzioni $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = 3x - 1$; siano $h(x)$ e $k(x)$ le funzioni composte $h(x) = f(g(x))$ e $k(x) = g(f(x))$. Determinare le espressioni delle funzioni $h(x)$ e $k(x)$, e le espressioni delle loro funzioni inverse: $h^{-1}(x)$ e $k^{-1}(x)$.

2) $h(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = 3^{3x-1} - 1$;
   $k(x) = g(f(x)) = g(3^x - 1) = 3 \cdot (3^x - 1) - 1 = 3^{x+1} - 4$. Passiamo adesso a determinare le loro funzioni inverse; per l'inversa di $h(x)$ posto $y = 3^{3x-1} - 1$ abbiamo $y + 1 = 3^{3x-1}$ da cui $3x - 1 = log_3(y + 1)$ ed infine $x = \dfrac{log_3(y+1)+1}{3}$; $h^{-1}(x) = \dfrac{log_3(x+1)+1}{3}$. Veniamo adesso alla funzione inversa di k: posto $y = 3^{x+1} - 4$ abbiamo $y + 4 = 3^{x+1}$ da cui $x + 1 = log_3(y + 4)$ ed infine $x = log_3(y + 4) - 1$; $k^{-1}(x) = log_3(x + 4) - 1$.

3) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = [-10, 10]$ e $B =]-e, e[$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$, ed indicare per ognuno di essi se risulta insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

3) Per i due insiemi proposti vale $B \subset A$ quindi $A \cap B = B =]-e, e[$, intervallo aperto, e $A \cup B = A = [-10, 10]$, intervallo chiuso.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + tg\,x}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{3x}\right)^{1+\frac{1}{x}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + tg\,x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 1 + \dfrac{tg\,x}{x} = 1 + (\to 1) = 2.$

   Il limite proposto può essere risolto anche con l'utilizzo del Teorema di De L'Hopital infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + tg\,x}{x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI, utilizzando il teorema otteniamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + tg\,x}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{1 + 1 + tg^2\,x}{1} = \lim_{x \to 0} 2 + tg^2\,x = 2 + (\to 0) = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-3}{3x}\right)^{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} = \left(\to \frac{2}{3}\right)^{(\to 1)} = \frac{2}{3}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = log^2 x$.

5) $C.E.$: la funzione logaritmica è definita se e solo se il sua argomento è positivo, la condizione da imporre è $x > 0$; $C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ nel suo campo di esistenza perché si tratta di una funzione espressa tramite un quadrato. $y = 0$ se e solo se $log^2 x = 0$ ovvero $log\, x = 0 \Rightarrow x = 1$; unica intersezione con gli assi nel punto $A(1,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0^+} log^2 x = (\to -\infty)^2 = +\infty$; AV di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} log^2 x = (\to +\infty)^2 = +\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{x} = 0$; in quanto per $x \to +\infty$, $log^2 x = o(x)$. La funzione non presenta né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo.

Il precedente limite può essere risolto anche con l'utilizzo del Teorema di De L'Hopital infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI, utilizzando il teorema otteniamo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\, log\, x \cdot \frac{1}{x}}{1} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\, log\, x}{x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI $\overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2\, log\, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\, log\, x}{x}$.

$y' > 0$ se $\frac{2\, log\, x}{x} > 0 \Rightarrow log\, x > 0$ da cui $x > 1$. Funzione strettamente decrescente in $]0, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty[$. Il punto $A(1,0)$ è punto di minimo assoluto per la funzione.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{2 \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - 2\, log\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{2(1 - log\, x)}{x^2}$.

$y'' > 0$ se $\frac{2(1 - log\, x)}{x^2} > 0 \Rightarrow 1 - log\, x > 0 \Rightarrow log\, x < 1$ da cui $x < e$.

Funzione strettamente convessa in $]0, e]$, strettamente concava in $[e, +\infty[$. Il punto $A(1,0)$ è punto di minimo assoluto per la funzione$\forall x \geq 0$. $y(e) = 1$, il punto $F(e, 1)$ è punto di flesso.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale):

.

6) (8 punti) Determinare il valore del parametro reale a tale per cui

$$\int_0^2 x\,dx = \int_2^4 a\,dx\,.$$

6) L'uguaglianza $\displaystyle\int_0^2 x\,dx = \int_2^4 a\,dx$ è equivalente alla $\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^2 = (ax)_2^4$; passiamo alla sostituzione ed otteniamo $2 - 0 = 4a - 2a$ che facilmente porta a $a = 1$.

7) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^{1-x}$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$ e determinare l'unico valore che soddisfa il Teorema nell'intervallo proposto.

7) La funzione proposta è ottenuta dalla composizione fra una funzione esponenziale ed una funzione lineare, quindi è continua e derivabile su $\mathbb{R}$, di conseguenza lo è su $[0,2]$. $f(0) = e$ e $f(2) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, per la derivata abbiamo $f'(x) = e^{1-x} \cdot (-1) = -e^{1-x}$. Per determinare il valore che soddisfa il Teorema nell'intervallo proposto dobbiamo risolvere l'equazione $f'(x) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ che viene riscritta come $-e^{1-x} = \dfrac{\frac{1}{e} - e}{2} = \dfrac{1 - e^2}{2e} = -\dfrac{e^2 - 1}{2e}$, l'equazione da risolvere è quindi $e^{1-x} = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$ da cui $1 - x = log\left(\dfrac{e^2 - 1}{2e}\right)$ che porta al valore cercato $x = 1 - log\left(\frac{e^2-1}{2e}\right) = log\left(\frac{2e^2}{e^2-1}\right) \approx 0.83856$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione di quattro variabili $f(x,y,z,w) = xyz - y^2 z + 2\,e^z + x\,log\,w\,.$

8) $f'_x = yz + log\,w$ $\qquad$ $f'_y = xz - 2\,yz$

$f'_z = xy - y^2 + 2\,e^z$ $\qquad$ $f'_w = x \cdot \dfrac{1}{w} = \dfrac{x}{w}\,.$