

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)

3 ottobre 2023

Compito 01 ✓

- 1) (6 punti) Siano A , B e C i seguenti tre insiemi:
1. A è l'insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano, $A = \{a, b, c, \dots, u, v, z\}$;
 2. B è l'insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese,
 $B = \{a, b, c, \dots, i, j, k, l, \dots, w, x, y, z\}$;
 3. C è l'insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano, $C = \{a, e, i, o, u\}$.
- Determinare i seguenti tre insiemi: $A \cup B \cup C$, $(A \cup C) \setminus B$ e $(A \setminus C) \cup B$.
(Con $X \setminus Y$ indichiamo la differenza insiemistica fra l'insieme X e l'insieme Y)
- 2) (8 punti) Consideriamo le funzioni $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = 3x - 1$; siano $h(x)$ e $k(x)$ le funzioni composte $h(x) = f(g(x))$ e $k(x) = g(f(x))$. Determinare le espressioni delle funzioni $h(x)$ e $k(x)$, e le espressioni delle loro funzioni inverse: $h^{-1}(x)$ e $k^{-1}(x)$.
- 3) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = [-10, 10]$ e $B =] - e, e[$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$, ed indicare per ognuno di essi se risulta insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 3}{3x} \right)^{1 + \frac{1}{x}}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \log^2 x$.
- 6) (8 punti) Determinare il valore del parametro reale a tale per cui
$$\int_0^2 x \, dx = \int_2^4 a \, dx .$$
- 7) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^{1-x}$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$ e determinare l'unico valore che soddisfa il Teorema nell'intervallo proposto.
- 8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione di quattro variabili
 $f(x, y, z, w) = xyz - y^2 z + 2e^z + x \log w$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.