UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Corsi di Laurea Triennale in Economia
A.A. 2023/24
Correzione Prova di verifica di fine Precorso Matematica 2023
I Versione

1) Indichiamo con m il coefficiente angolare e con q l'intercetta della retta di equazione: $9x+3y-18=0$, risulta:
☒ 1a) $m=-3$ e $q=6$
☐ 1b) $m=3$ e $q=6$
☐ 1c) $m=-3$ e $q=-6$
☐ 1d) $m=3$ e $q=-6$
SOLUZIONE:esplicitiamo l'equazione rispetto alla variabile y, otteniamo $3y=-9x+18$ e dividendo tutti i coefficienti per 3 si ha l'equazione esplicitata $y=-3x+6$; il coefficiente angolare della retta è -3 e l'intercetta è 6. Risposta corretta 1a.

2) Si consideri un insieme A tale che $A\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}$ e $A\cap\{a,c\}=\{a\}$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
☐ 2a) $a\notin A$
☐ 2b) $b\in A$
☒ 2c) $A\subseteq\{a,b\}$
☐ 2d) $A\cap\{a,b,c\}=\emptyset$
SOLUZIONE: da $A\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}$ si ottiene che $a\in A$ e $A\subseteq\{a,b,c\}$, quindi le risposte 2a e 2d sono certamente false; da $A\cap\{a,c\}=\{a\}$ si ottiene che $c\notin A$ e quindi $A\subseteq\{a,b\}$. Non possiamo concludere con certezza che $b\in A$. Risposta corretta 2c.

3) L'equazione $2^{1+3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}=0$ è verificata:
☐ 3a) per $x=-1$
☐ 3b) per $x=\frac{6}{7}$
☒ 3c) per $x=-\frac{7}{6}$
☐ 3d) per nessun valore di x
SOLUZIONE: l'equazione proposta può essere scritta come $2^{1+3x}=\left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$ ovvero $2^{1+3x}=8^{-(x+2)}$ da cui $2^{1+3x}=2^{-3(x+2)}$; quindi l'equazione è soddisfatta se $1+3x=-3(x+2)$ che ha come soluzione $x=-\frac{7}{6}$. Risposta corretta 3c.

4) La disequazione $4^{x+1}<2^{3x-1}$ risulta soddisfatta per
☐ 4a) $x>1$
☒ 4b) $x>3$
☐ 4c) $x<1$
☐ 4d) $x<3$

SOLUZIONE: anche in questo caso usiamo le proprietà delle potenze, la disequazione proposta può essere scritta come $2^{2(x+1)} < 2^{3x-1}$ da cui $2^{2x+2} < 2^{3x-1}$; quindi la disequazione è soddisfatta se $2x+2 < 3x-1$ che ha come soluzione le $x > 3$. Risposta corretta 4b.

5) L'espressione $cos^2(2\alpha) - sen^2(2\alpha)$ risulta, per ogni valore dell'arco α, uguale a:

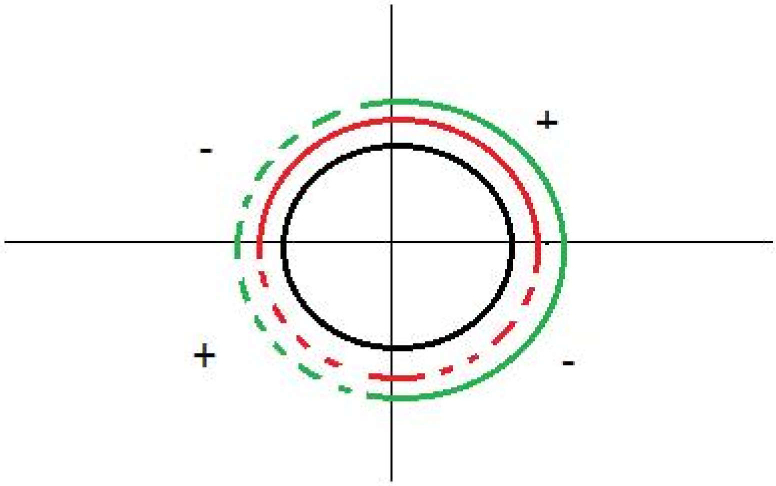
☐ 5a) $-sen(4\alpha)$
☐ 5b) $sen(4\alpha)$
☐ 5c) $-cos(4\alpha)$
☒ 5d) $cos(4\alpha)$

SOLUZIONE: ricordando la formula di duplicazione del coseno: $cos^2\alpha - sen^2\alpha = cos(2\alpha)$ si ottiene facilmente $cos^2(2\alpha) - sen^2(2\alpha) = cos(4\alpha)$. Risposta corretta 5d.

6) Relativamente alle sole x comprese fra 0 e 2π, la disequazione $sen\,x \cdot cos\,x < 0$ risulta soddisfatta per :

☐ 6a) $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ oppure $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$
☐ 6b) $0 < x < \pi$
☒ 6c) $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
☐ 6d) $\pi < x < 2\pi$

SOLUZIONE: studiamo separtamente i due fattori del prodotto: $sen\,x > 0$ per $0 < x < \pi$, mentre $cos\,x > 0$ per $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$; poniamo le due soluzioni sulla circonferenza goniometrica rappresentata di seguito (in rosso evidenziato il segno di $sen\,x$, in verde quello di $cos\,x$)



come è facile notare, il prodotto $sen\,x \cdot cos\,x$ è negativo nel secondo e nel quarto quadrante del piano cartesiano; quindi la soluzione al quesito è $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. Risposta corretta 6c.

7) Un triangolo rettangolo presenta un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{6}$ e l'ipotenusa di lunghezza $20\,cm$, il suo perimetro misura:

☒ 7a) $10\left(3+\sqrt{3}\right)\ cm$

☐ 7b) $50\ cm$

☐ 7c) $60\ cm$

☐ 7d) $10\left(3-\sqrt{3}\right)\ cm$

SOLUZIONE: per le formule di trigonometria, se un triangolo rettangolo ha ipotenusa lunga 20 cm ed un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{6}$ allora il cateto maggiore ha lunghezza $20 \cdot cos\frac{\pi}{6} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$ $10\sqrt{3}\ cm$ e quello minore di lunghezza $20 \cdot sen\frac{\pi}{6} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10\ cm$. Il perimetro del triangolo sarà quindi $2P = 20 + 10\sqrt{3} + 10 = 30 + 10\sqrt{3} = 10\left(3+\sqrt{3}\right)\ cm$. Risposta corretta 7a.

8) La disequazione $\frac{2 - log_4 x}{log_5 x} < 0$ risulta soddisfatta per :

☐ 8a) $1 < x < 16$

☐ 8b) $x > 16$

☒ 8c) $0 < x < 1$ oppure $x > 16$

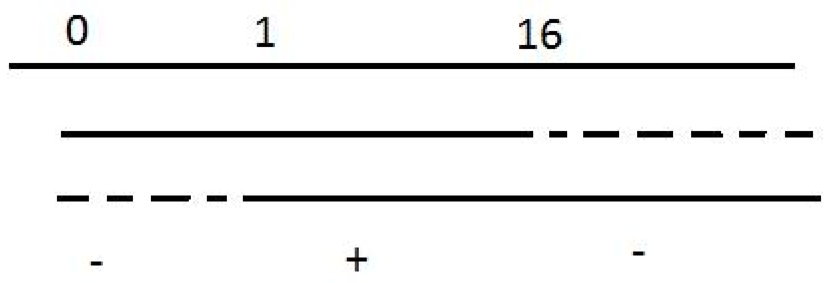
☐ 8d) $0 < x < 1$

SOLUZIONE: si tratta di una disequazione fratta logaritmica, ricordiamo che ogni logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; studiamo separtamente il numeratore ed il denominatore:

N: $2 - log_4 x > 0$ ovvero $log_4 x < 2$ che ha soluzione $0 < x < 16$;

D: $log_5 x > 0$ che ha soluzione $x > 1$.

Poniamo le due soluzioni sul grafico di riferimento che segue



come è facile notare, il rapporto è negativo per le $0 < x < 1$ oppure per le $x > 16$. Risposta corretta 8c.

9) Fra le parabole che seguono quale presenta fuoco nel punto di coordinate $\left(1, \frac{5}{4}\right)$?

☐ 9a) $y = x^2 + 2\,x - 2$
☐ 9b) $y = x^2 - 2\,x - 2$
☐ 9c) $y = x^2 + 2\,x + 2$
☒ 9d) $y = x^2 - 2\,x + 2$

SOLUZIONE: il fuoco di ogni parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a}$, le parabole proposte tutte presentano coefficiente di secondo grado $a = 1$, quindi tutte le parabole dell'esercizio hanno $x_V = -\frac{b}{2}$; le parabole proposte nelle risposte 9a e 9c presentano coefficiente $b = 2$, quindi $x_V = -1$, di conseguenza queste due risposte sono da escludere; per le parabole proposte nelle risposte 9b e 9d il coefficiente b è uguale a -2, quindi $x_V = 1$, risposte da attenzionare. Per determinare quale delle due è corretta dobbiamo passare a valutare l'ordinata del punto di fuoco: $y_V = \frac{1 - \Delta}{4a}$, con $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4c$, dato che $a = 1$ e $b = -2$; sostituito Δ nella formula per y_V otteniamo $y_V = \frac{4c - 3}{4}$. Veniamo adesso alle due risposte attenzionate, nella 9b $c = -2$ e $y_V = -\frac{11}{4}$, mentre nella 9d $c = 2$ e $y_V = \frac{5}{4}$. Risposta corretta 9d.

10) Si consideri la parabola P di equazione $y = x^2 + x + 1$, la retta R_1 di equazione $y = x$, la retta R_2 di equazione $y = x + 1000$ e la retta R_3 di equazione $y = x - 1000$. Quale fra le seguenti affermazioni è vera?

☐ 10a) nessuna delle tre rette proposte interseca la parabola P
☒ 10b) solo la retta R_2 interseca la parabola P
☐ 10c) solo la retta R_3 interseca la parabola P
☐ 10d) solo la retta R_1 interseca la parabola P

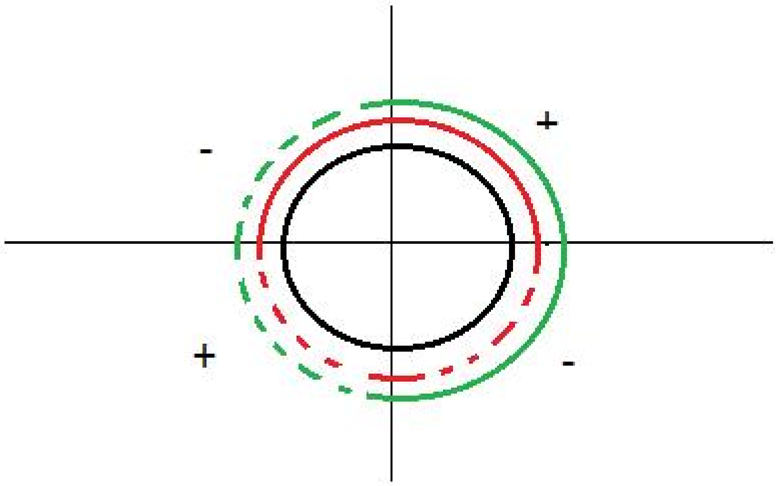
SOLUZIONE: per determinare se una retta interseca una parabola è sufficiente eguagliare le due equazioni; per la retta R_1 posto $x^2 + x + 1 = x$ si ottiene $x^2 + 1 = 0$, equazione che non ammette soluzioni reali, la retta R_1 non interseca la parabola P; sulla retta R_2 posto $x^2 + x + 1 = x + 1000$ si ottiene $x^2 = 999$, equazione che ammette due soluzioni reali distinte $x = \pm\sqrt{999} = \pm 3\sqrt{111}$, la retta R_2 interseca la parabola P; veniamo infine alla retta R_3 posto $x^2 + x + 1 = x - 1000$ si ottiene $x^2 + 1001 = 0$, equazione che non ammette soluzioni reali, la retta R_3 non interseca la parabola P. Risposta corretta 10b.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Corsi di Laurea Triennale in Economia
A.A. 2023/24
Correzione Prova di verifica di fine Precorso Matematica 2023
II Versione

1) L'espressione $sen^2(2\alpha) - cos^2(2\alpha)$ risulta, per ogni valore dell'arco α, uguale a:
☒ 1a) $-cos(4\alpha)$
☐ 1b) $cos(4\alpha)$
☐ 1c) $-sen(4\alpha)$
☐ 1d) $sen(4\alpha)$
SOLUZIONE: ricordando la formula di duplicazione del coseno: $cos^2\alpha - sen^2\alpha = cos(2\alpha)$ si ottiene facilmente $sen^2(2\alpha) - cos^2(2\alpha) = -(cos^2(2\alpha) - sen^2(2\alpha)) = -cos(4\alpha)$. Risposta corretta 1a.

2) Si consideri la parabola P di equazione $y = x^2 + x + 1001$, la retta R_1 di equazione $y = x$, la retta R_2 di equazione $y = x + 1000$ e la retta R_3 di equazione $y = x - 1000$. Quale fra le seguenti affermazioni è vera?
☐ 2a) solo la retta R_1 interseca la parabola P
☒ 2b) nessuna delle tre rette proposte interseca la parabola P
☐ 2c) solo la retta R_2 interseca la parabola P
☐ 2d) solo la retta R_3 interseca la parabola P
SOLUZIONE: per determinare se una retta interseca una parabola è sufficiente eguagliare le due equazioni; per la retta R_1 posto $x^2 + x + 1001 = x$ si ottiene $x^2 + 1001 = 0$, equazione che non ammette soluzioni reali, la retta R_1 non interseca la parabola P; sulla retta R_2 posto $x^2 + x + 1001 = x + 1000$ si ottiene $x^2 + 1 = 0$, equazione che non ammette soluzioni reali, la retta R_2 non interseca la parabola P; veniamo infine alla retta R_3 posto $x^2 + x + 1001 = x - 1000$ si ottiene $x^2 + 2001 = 0$, equazione che non ammette soluzioni reali, la retta R_3 non interseca la parabola P. Risposta corretta 2b.

3) Relativamente alle sole x comprese fra 0 e 2π, la disequazione $sen\,x \cdot cos\,x > 0$ risulta soddisfatta per :
☒ 3a) $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ oppure $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$
☐ 3b) $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
☐ 3c) $\pi < x < 2\pi$
☐ 3d) $0 < x < \pi$
SOLUZIONE: studiamo separtamente i due fattori del prodotto: $sen\,x > 0$ per $0 < x < \pi$, mentre $cos\,x > 0$ per $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$; poniamo le due soluzioni sulla circonferenza goniometrica rappresentata di seguito (in rosso evidenziato il segno di $sen\,x$, in verde quello di $cos\,x$)



come è facile notare, il prodotto $sen\,x \cdot cos\,x$ è positivo nel primo e nel terzo quadrante del piano cartesiano; quindi la soluzione al quesito è $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ oppure $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. Risposta corretta 3a.

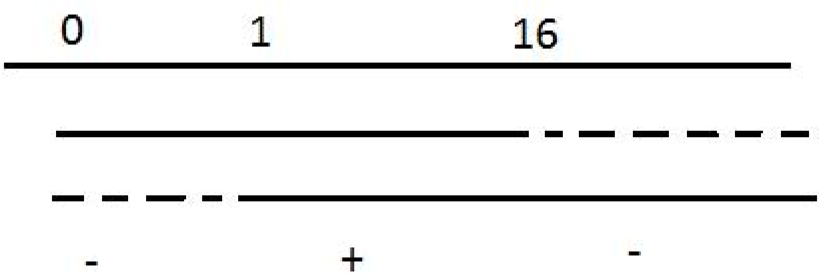
4) La disequazione $\frac{2 - \log_4 x}{\log_5 x} > 0$ risulta soddisfatta per :

☐ 4a) $x > 16$
☒ 4b) $1 < x < 16$
☐ 4c) $0 < x < 2$
☐ 4d) $0 < x < 1$ oppure $16 < x$

SOLUZIONE: si tratta di una disequazione fratta logaritmica, ricordiamo che ogni logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; studiamo separtamente il numeratore ed il denominatore:

N: $2 - log_4 x > 0$ ovvero $log_4 x < 2$ che ha soluzione $0 < x < 16$;
D: $log_5 x > 0$ che ha soluzione $x > 1$.

Poniamo le due soluzioni sul grafico di riferimento che segue



come è facile notare, il rapporto è positivo per le $1 < x < 16$. Risposta corretta 4b.

5) Un triangolo rettangolo presenta un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e l'ipotenusa di lunghezza $20\,cm$, il suo perimetro misura:

☐ 5a) $10\left(3-\sqrt{3}\right)\,cm$

☐ 5b) $60\,cm$

☐ 5c) $50\,cm$

☒ 5d) $10\left(3+\sqrt{3}\right)\,cm$

SOLUZIONE: per le formule di trigonometria, se un triangolo rettangolo ha ipotenusa lunga 20 cm ed un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ allora il cateto minore ha lunghezza $20 \cdot cos\frac{\pi}{3} = 20 \cdot \frac{1}{2} =$ $10\,cm$ e quello maggiore di lunghezza $20 \cdot sen\frac{\pi}{3} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,cm$. Il perimetro del triangolo sarà quindi $2P = 20 + 10 + 10\sqrt{3} = 30 + 10\sqrt{3} = 10\left(3+\sqrt{3}\right)\,cm$. Risposta corretta 5d.

6) La disequazione $4^{x+1} > 2^{3x-1}$ risulta soddisfatta per :

☐ 6a) $x > 3$

☒ 6b) $x < 3$

☐ 6c) $x > 1$

☐ 6d) $x < 1$

SOLUZIONE: per risolvere la disequazione usiamo le proprietà delle potenze, la disequazione proposta può essere scritta come $2^{2(x+1)} > 2^{3x-1}$ da cui $2^{2x+2} > 2^{3x-1}$; quindi la disequazione è soddisfatta se $2x+2 > 3x-1$ che ha come soluzione le $x < 3$. Risposta corretta 6b.

7) L'equazione $2^{x+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{1+3x} = 0$ è verificata:

☐ 7a) per $x = 1$

☐ 7b) per nessun valore di x

☒ 7c) per $x = -\frac{4}{7}$

☐ 7d) per $x = \frac{7}{4}$

SOLUZIONE: anche in questo caso usiamo le proprietà delle potenze, l'equazione proposta può essere scritta come $2^{x+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1+3x}$ ovvero $2^{x+2} = 4^{-(1+3x)}$ da cui $2^{x+2} = 2^{-2(1+3x)}$; quindi l'equazione è soddisfatta se $x+2 = -2(1+3x)$ che ha come soluzione $x = -\frac{4}{7}$. Risposta corretta 7c.

8) Si consideri un insieme A tale che $A \cup \{b,c\} = \{a,b,c\}$ e $A \cap \{a,b\} = \{a\}$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

☐ 8a) $A \cap \{a,b,c\} = \emptyset$

☒ 8b) $A \subseteq \{a,c\}$

☐ 8c) $a \notin A$

☐ 8d) $b \in A$

SOLUZIONE: da $A \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$ si ottiene che $a \in A$ e $A \subseteq \{a, b, c\}$, quindi le risposte 8a e 8c sono certamente false; da $A \cap \{a, b\} = \{a\}$ si ottiene che $b \notin A$, di conseguenza anche la risposta 8d è errata, quindi $A \subseteq \{a, c\}$. È interessante notare che non possiamo concludere con certezza che $c \in A$. Risposta corretta 8b.

9) Indichiamo con m il coefficiente angolare e con q l'intercetta della retta di equazione: $9x - 3y - 18 = 0$, risulta:

☐ 9a) $m = 3$ e $q = 6$
☐ 9b) $m = -3$ e $q = 6$
☒ 9c) $m = 3$ e $q = -6$
☐ 9d) $m = -3$ e $q = -6$

SOLUZIONE:esplicitiamo l'equazione rispetto alla variabile y, otteniamo $3y = 9x - 18$ e dividendo tutti i coefficienti per 3 si ha l'equazione esplicitata $y = 3x - 6$; il coefficiente angolare della retta è 3 e l'intercetta è -6. Risposta corretta 9c.

10) Fra le parabole che seguono quale presenta fuoco nel punto di coordinate $\left(-1, \frac{5}{4}\right)$?

☐ 10a) $y = x^2 + 2x - 2$
☒ 10b) $y = x^2 + 2x + 2$
☐ 10c) $y = x^2 - 2x + 2$
☐ 10d) $y = x^2 - 2x - 2$

SOLUZIONE: il fuoco di ogni parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a}$, le parabole proposte tutte presentano coefficiente di secondo grado $a = 1$, quindi tutte le parabole dell'esercizio hanno $x_V = -\frac{b}{2}$; le parabole proposte nelle risposte 10c e 10d presentano coefficiente $b = -2$, quindi $x_V = 1$, di conseguenza queste due risposte sono da escludere; per le parabole proposte nelle risposte 10a e 10b il coefficiente b è uguale a 2, quindi $x_V = -1$, risposte da attenzionare. Per determinare quale delle due è corretta dobbiamo passare a valutare l'ordinata del punto di fuoco: $y_V = \frac{1 - \Delta}{4a}$, con $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4c$, dato che $a = 1$ e $b = 2$; sostituito Δ nella formula per y_V otteniamo $y_V = \frac{4c - 3}{4}$. Veniamo adesso alle due risposte attenzionate, nella 10a $c = -2$ e $y_V = -\frac{11}{4}$, mentre nella 10b $c = 2$ e $y_V = \frac{5}{4}$. Risposta corretta 10b.