# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

6 novembre 2023

Compito A1- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to -2} \frac{3+5x}{6}$.
$\lim_{x \to -2} \frac{3+5x}{6} = -\frac{7}{6}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left|\frac{3+5x}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right)\right| = \left|\frac{5x+10}{6}\right| = \frac{5}{6}\left|x+2\right|$; posto $\frac{5}{6}\left|x+2\right| < \epsilon$ abbiamo $\left|x+2\right| < \frac{6}{5}\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{6}{5}\epsilon$.

2) Siano dati gli insiemi $A = [-2, 8]$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\}$. Determinare l'insieme $A \cap B$ ed il suo insieme derivato $D(A \cap B)$. L'insieme $A \cap B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?
$B = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\} = ]1, +\infty[$; $A \cap B = [-2, 8] \cap ]1, +\infty[ = ]1, 8]$ insieme né aperto né chiuso, $D(A \cap B) = [1, 8]$.

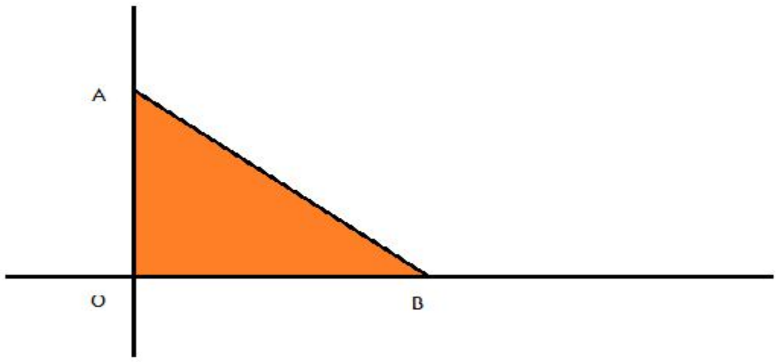
3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = x - 2$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.
$f(g(h(x))) = f(g(x-2)) = f(2^{x-2}+1) = \frac{(2^{x-2}+1)+1}{(2^{x-2}+1)-1} = \frac{2^{x-2}+2}{2^{x-2}} = 1 + 2^{4-x}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = 1 + 2^{4-x}$ da cui $2^{4-x} = y - 1$ e conseguentemente $4 - x = log_2(y-1)$ con $x = 4 - log_2(y-1)$; espressione dell'inversa: $y = 4 - log_2(x-1)$.

4) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q\, o\, p)$.

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $q\, o\, p$ | $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q\, o\, p)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

.

5) Date le funzioni $f(x) = 3^{2x+1} + k$ e $g(x) = log(x-2)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.
Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^{2x+1} + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + k \end{cases}$; $\mathrm{A}(0, 3+k)$. Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema
$\begin{cases} y = log\,(x-2) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$; $\mathrm{B}(3, 0)$.




Il triangolo AOB è rappresentato in fugura con base $\overline{\mathrm{OB}} = 3$, altezza $\overline{\mathrm{OA}} = 3 + k$ e area $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \cdot \overline{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3 + k) = \frac{3}{2}(3 + k)$; posto $\frac{3}{2}(3 + k) = 5$, si ottiene facilmente $k = \frac{1}{3}$.

## Compito **A2**- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x - 12}{5}$.

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x - 12}{5} = -\frac{3}{5}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left| \frac{3x - 12}{5} - \left( -\frac{3}{5} \right) \right| = \left| \frac{3x - 9}{5} \right| = \frac{3}{5}|x - 3|$; posto $\frac{3}{5}|x - 3| < \epsilon$ abbiamo $|x - 3| < \frac{5}{3}\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{5}{3}\epsilon$.

2) Siano dati gli insiemi $A = [3, 10[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 8\}$. Determinare l'insieme $A \cup B$ ed il suo insieme interno $(A \overset{\circ}{\cup} B)$. L'insieme $A \cup B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 8\} = ]-\infty, 8]$; $A \cup B = [3, 10[ \cup ]-\infty, 8] = ]-\infty, 10[$ insieme aperto, $(A \overset{\circ}{\cup} B) = A \cup B$ in quanto insieme aperto.

3) Date le funzioni $f(x) = log_2 x$, $g(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$ e $h(x) = 2x + 1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$f(g(h(x))) = f(g(2x + 1)) = f\left( \frac{(2x + 1) - 1}{(2x + 1) + 2} \right) = f\left( \frac{2x}{2x + 3} \right) = log_2\left( \frac{2x}{2x + 3} \right)$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = log_2\left( \frac{2x}{2x + 3} \right)$ da cui $\frac{2x}{2x + 3} = 2^y$ e conseguentemente $2x(1 - 2^y) = 3 \cdot 2^y$ con $x = \frac{3 \cdot 2^y}{2(1 - 2^y)}$; espressione dell'inversa: $y = \frac{3 \cdot 2^x}{2(1 - 2^x)}$.

4) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\, o\, q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$.

| $p$ | $q$ | $p\,o\,q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p\,o\,q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

5) Date le funzioni $f(x) = 2^{2-x} + 1$ e $g(x) = log\,(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x=0 \\ y=2^{2-x}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$;
A$(0,5)$. Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema
$\begin{cases} y=log\,(x-k) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(x-k)=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-k=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k+1 \\ y=0 \end{cases}$;
B$(k+1, 0)$. Il triangolo AOB è rappresentato nella fugura della pagina precedente con base $\overline{\mathrm{OB}} = k+1$, altezza $\overline{\mathrm{OA}} = 5$ e area
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \cdot \overline{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot 5 = \frac{5}{2}(k+1)$; posto $\frac{5}{2}(k+1) = 5$, si ottiene facilmente $k=1$.

## Compito A3 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to 6} \frac{3x+11}{8}$.

$\lim\limits_{x \to 6} \frac{3x+11}{8} = \frac{29}{8}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left| \frac{3x+11}{8} - \frac{29}{8} \right| =$
$\left| \frac{3x-18}{8} \right| = \frac{3}{8}|x-6|$; posto $\frac{3}{8}|x-6| < \epsilon$ abbiamo $|x-6| < \frac{8}{3}\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{8}{3}\epsilon$.

2) Siano dati gli insiemi $A = ]-3, 12[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon -5 \le x \le 8\}$. Determinare l'insieme $A \cup B$ ed il suo insieme frontiera $\delta(A \cup B)$. L'insieme $A \cup B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?
$B = \{x \in \mathbb{R}\colon -5 \le x \le 8\} = [-5, 8]$; $A \cup B = ]-3, 12[ \cup [-5, 8] = [-5, 12[$ insieme né aperto né chiuso, $\delta(A \cup B) = \{-5, 12\}$.

3) Date le funzioni $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \frac{2x}{x+1}$ e $h(x) = 2^x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.
$f(g(h(x))) = f(g(2^x)) = f\left(\frac{2 \cdot 2^x}{2^x+1}\right) = f\left(\frac{2^{x+1}}{2^x+1}\right) =$
$3 \cdot \frac{2^{x+1}}{2^x+1} - 1 = \frac{5 \cdot 2^x - 1}{2^x+1}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = \frac{5 \cdot 2^x - 1}{2^x+1}$ da cui $y(2^x+1) = 5 \cdot 2^x - 1$ e conseguentemente
$2^x = \frac{1+y}{5-y}$ con $x = log_2\left(\frac{1+y}{5-y}\right)$; espressione dell'inversa: $y = log_2\left(\frac{1+x}{5-x}\right)$.

4) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q\,e\,p)$.

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $q\,e\,p$ | $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q\,e\,p)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

.

5) Date le funzioni $f(x) = k + 2^{1+2x}$ e $g(x) = log\,(2x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = k + 2^{1+2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k + 2 \end{cases}$; A$(0, k+2)$. Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} y = log\,(2x-3) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(2x-3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$; B$(2, 0)$.

Il triangolo AOB è rappresentato nella fugura della seconda pagina con base $\overline{\text{OB}} = 2$, altezza $\overline{\text{OA}} = k+2$ e area $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{\text{OB}} \cdot \overline{\text{OA}} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (k+2) = k+2$; posto $k + 2 = 5$, si ottiene facilmente $k = 3$.

## Compito A4 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to -1} -\dfrac{x+12}{7}$.

$\lim\limits_{x \to -1} -\dfrac{x+12}{7} = -\dfrac{11}{7}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left| -\dfrac{x+12}{7} - \left(-\dfrac{11}{7}\right) \right| = \left| -\dfrac{x+1}{7} \right| = \dfrac{1}{7}\left|x+1\right|$; posto $\dfrac{1}{7}\left|x+1\right| < \epsilon$ abbiamo $\left|x+1\right| < 7\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = 7\epsilon$.

2) Siano dati gli insiemi $A = \,]0, +\infty[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -5 \vee x > 15\}$. Determinare l'insieme $A \cap B$ ed il suo insieme chiusura $\overline{A \cap B}$. L'insieme $A \cap B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -5 \vee x > 15\} = \,]-\infty, -5] \cup \,]15, +\infty[$;

$A \cap B = (]-\infty, -5] \cup \,]15, +\infty[) \cap \,]0, +\infty[ \,=\, ]15, +\infty[$ insieme aperto,

$\overline{A \cap B} = \overline{]15, +\infty[} = [15, +\infty[$.

3) Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = log\,x$ e $h(x) = 3x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$f(g(h(x))) = f(g(3x)) = f(log(3x)) = \dfrac{log(3x)}{log(3x)-2}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = \dfrac{log(3x)}{log(3x)-2}$ da cui $y(log(3x)-2) = log(3x)$ e conseguentemente $log(3x) = \dfrac{2y}{y-1}$ con $x = \dfrac{1}{3}e^{\frac{2y}{y-1}}$; espressione dell'inversa: $y = \dfrac{1}{3}e^{\frac{2x}{x-1}}$.

4) Siano $p$ e $q$ due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow q)\; e\; (q \Leftrightarrow p)$.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Leftrightarrow p$ | $(p \Rightarrow q)\, e\, (q \Leftrightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

.

5) Date le funzioni $f(x) = 3^{1-x}$ e $g(x) = log\,(x-2k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$; A$(0, 3)$.

Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} y = log\,(x-2k) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(x-2k) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2k = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 0 \end{cases};$$

B$(2k+1, 0)$. Il triangolo AOB è rappresentato nella fugura della seconda pagina con base $\overline{\text{OB}} = 2k+1$, altezza $\overline{\text{OA}} = 3$ e area

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\text{OB}} \cdot \overline{\text{OA}} = \frac{1}{2} \cdot (2k+1) \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot (2k+1)$; posto $\frac{3}{2} \cdot (2k+1) = 6$, si ottiene facilmente $k = \frac{3}{2}$.