Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

6 novembre 2023

Compito B1- Riccarelli

1) Sia data la funzione $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{se } x\le 0 \\ ax+b & \text{se } 0<x<3 \\ 7 & \text{se } 3\le x \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

La funzione $f(x)$, per come è definita, è continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ tranne i punti 0 e 3, per la continuità nel punto 0 si deve imporre la condizione $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, così come per la continuità nel punto 3 si dovrà imporre $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2-x=2$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b$, quindi $b=2$;

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} ax+2=3a+2$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} 7=7$, quindi $3a+2=7$, da cui facilmente $a=\dfrac{5}{3}$.

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ e che $f(g(x))=\dfrac{2x}{x+1}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Da $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ si ottiene $f(g(x))=\dfrac{3g(x)}{g(x)+2}$; posto $\dfrac{3g(x)}{g(x)+2}=\dfrac{2x}{x+1}$ abbiamo $3g(x)(x+1)=2x(g(x)+2)$ da cui $g(x)(x+3)=4x$ e conseguentemente $g(x)=\dfrac{4x}{x+3}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y=\dfrac{4x}{x+3}$ da cui $y(x+3)=4x$ e conseguentemente $x(4-y)=3y$ con $x=\dfrac{3y}{4-y}$; espressione dell'inversa: $y=\dfrac{3x}{4-x}$.

3) Siano dati gli insiemi $A=[-6,8]$ e $B=\{x\in\mathbb{R}: x\le 3\}$. Determinare l'insieme $C(A\cap B)$ ed il suo insieme derivato $D(C(A\cap B))$. (Con $C(X)$ indichiamo l'insieme complementare di X)

$B=\{x\in\mathbb{R}: x\le 3\}=]-\infty,3]$; $A\cap B=[-6,8]\cap]-\infty,3]=[-6,3]$;

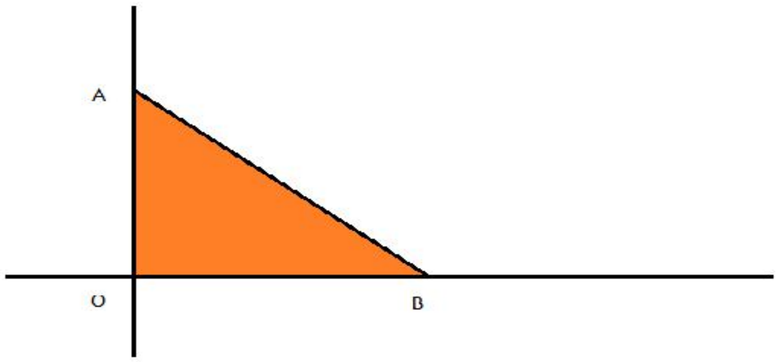
$C(A\cap B)=]-\infty,-6[\cup]3,+\infty[$; $D(C(A\cap B))=]-\infty,-6]\cup[3,+\infty[$.

4) Date le funzioni $f(x)=2^{x+3}+k$ e $g(x)=log\,(x-1)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 10.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x=0 \\ y=2^{x+3}+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=8+k \end{cases}$;

A$(0,8+k)$. Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$\begin{cases} y=log\,(x-1) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(x-1)=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$; B$(2,0)$.



Il triangolo AOB è rappresentato in fugura con base $\overline{\text{OB}} = 2$, altezza $\overline{\text{OA}} = 8 + k$ e area $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\text{OB}} \cdot \overline{\text{OA}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (8 + k) = 8 + k$; posto $8 + k = 10$, si ottiene facilmente $k = 2$.

5) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow q)\, e\, (r \Leftrightarrow q)$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q)\, e\, (r \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

.

Compito **B2**- Riccarelli

1) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \leq 2 \\ ax + b & \text{se } 2 < x < 3 \\ 1 + 3x & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

La funzione $f(x)$, per come è definita, è continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ tranne i punti 2 e 3, per la continuità nel punto 2 si deve imporre la condizione $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$, così come per la continuità nel punto 3 si dovrà imporre $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 5 = 5$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax + b = 2a + b$, quindi $2a + b = 5$;

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} ax + b = 3a + b$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 1 + 3x = 10$, quindi $3a + b = 10$. Per la continuità della $f(x)$ su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ devono quindi verificarsi le due condizioni: $2a + b = 5$ e $3a + b = 10$; da cui facilmente $a = 5$ e $b = -5$.

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ e che $f(g(x)) = \frac{x+1}{x+4}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Da $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ si ottiene $f(g(x)) = \dfrac{2g(x)}{g(x)+2}$; posto $\dfrac{2g(x)}{g(x)+2} = \dfrac{x+1}{x+4}$ abbiamo $2g(x)(x+4) = (g(x)+2)(x+1)$ da cui $g(x)(x+7) = 2(x+1)$ e conseguentemente $g(x) = \dfrac{2(x+1)}{x+7}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = \dfrac{2(x+1)}{x+7}$ da cui $y(x+7) = 2(x+1)$ e conseguentemente $x(y-2) = 2-7y$ con $x = \dfrac{2-7y}{y-2}$; espressione dell'inversa: $y = \dfrac{2-7x}{x-2}$.

3) Siano dati gli insiemi $A =]0,18[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x < 8\}$. Determinare l'insieme $C(A \cup B)$ ed il suo insieme frontiera $\delta(C(A \cup B))$. (Con $C(X)$ indichiamo l'insieme complementare di X)
$B = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x < 8\} =]-5,8[$; $A \cup B =]0,18[\cup]-5,8[=]-5,18[$;
$C(A \cup B) =]-\infty, -5] \cup [18, +\infty[$; $\delta(C(A \cup B)) = \{-5, 18\}$.

4) Date le funzioni $f(x) = 3^{x+2} - 1$ e $g(x) = log\,(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 8.
Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^{x+2} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases}$;
A$(0,8)$. Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema
$\begin{cases} y = log\,(x-k) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(x-k) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - k = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k+1 \\ y = 0 \end{cases}$;
B$(k+1, 0)$. Il triangolo AOB è rappresentato nella fugura della pagina precedente con base $\overline{\text{OB}} = k+1$, altezza $\overline{\text{OA}} = 8$ e area
$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{\text{OB}} \cdot \overline{\text{OA}} = \dfrac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot 8 = 4(k+1)$; posto $4(k+1) = 8$, si ottiene facilmente $k = 1$.

5) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q)\, o\, (r \Rightarrow q)$.

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$r \Rightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q)\, o\, (r \Rightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V

Compito **B3** - Riccarelli

1) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ bx & \text{se } 3 < x \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$.
La funzione $f(x)$, per come è definita, è continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ tranne i punti 1 e 3, per la continuità nel punto 1 si deve imporre la condizione

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, così come per la continuità nel punto 3 si dovrà imporre $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} a = a$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - 1 = 0$, quindi $a = 0$;

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - 1 = 8$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} bx = 3b$, quindi $3b = 8$; da cui facilmente $b = \dfrac{8}{3}$.

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ e che $f(g(x)) = \dfrac{x-2}{2x}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Da $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ si ottiene $f(g(x)) = \dfrac{2g(x)}{g(x)+1}$; posto $\dfrac{2g(x)}{g(x)+1} = \dfrac{x-2}{2x}$ abbiamo $4g(x) \cdot x = (g(x)+1)(x-2)$ da cui $g(x)(3x+2) = x-2$ e conseguentemente $g(x) = \dfrac{x-2}{3x+2}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = \dfrac{x-2}{3x+2}$ da cui $y(3x+2) = 2(x-2)$ e conseguentemente $x(3y-2) = -2(y+2)$ con $x = -\dfrac{2(y+2)}{3y-2} = \dfrac{2(y+2)}{2-3y}$; espressione dell'inversa: $y = \dfrac{2(x+2)}{2-3x}$.

3) Siano dati gli insiemi $A =]-10, 8]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x\}$. Determinare l'insieme $C(A \cup B)$ ed il suo insieme interno $C(\overset{\circ}{A \cup B})$. (Con $C(X)$ indichiamo l'insieme complementare di X)

$B = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x\} = [5, +\infty[$; $A \cup B =]-10, 8] \cup [5, +\infty[=]-10, +\infty[$;

$C(A \cup B) =]-\infty, -10]$; $C(\overset{\circ}{A \cup B}) =]-\infty, -10[$.

4) Date le funzioni $f(x) = k + 3^{1+2x}$ e $g(x) = log\,(2x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = k + 3^{1+2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k + 3 \end{cases}$;

A$(0, k+3)$. Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$\begin{cases} y = log\,(2x-3) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(2x-3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$; B$(2, 0)$.

Il triangolo AOB è rappresentato nella fugura della seconda pagina con base $\overline{\mathrm{OB}} = 2$, altezza $\overline{\mathrm{OA}} = k+3$ e area $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \cdot \overline{\mathrm{OA}} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (k+3) = k+3$; posto $k + 3 = 6$, si ottiene facilmente $k = 3$.

5) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\,o\,q)\;e\;(r \Leftrightarrow q)$.

p	q	r	$p\,o\,q$	$r \Leftrightarrow q$	$(p\,o\,q)\,e\,(r \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F

Compito B4 - Riccarelli

1) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x < -2 \\ 2 - x^2 & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ b & \text{se } 2 < x \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

La funzione $f(x)$, per come è definita, è continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ tranne i punti -2 e 2, per la continuità nel punto -2 si deve imporre la condizione $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$, così come per la continuità nel punto 2 si dovrà imporre $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} ax = -2a$ e $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 2 - x^2 = -2$, quindi $-2a = -2$, da cui $a = 1$;

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2 - x^2 = -2$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} b = b$, quindi $b = -2$.

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$ e che $f(g(x)) = \dfrac{3x+1}{x}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Da $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$ si ottiene $f(g(x)) = \dfrac{g(x)+2}{1-g(x)}$; posto $\dfrac{g(x)+2}{1-g(x)} = \dfrac{3x+1}{x}$ abbiamo $x(g(x)+2) = (1-g(x))(3x+1)$ da cui $g(x)(4x+1) = x+1$ e conseguentemente $g(x) = \dfrac{x+1}{4x+1}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = \dfrac{x+1}{4x+1}$ da cui $y(4x+1) = x+1$ e conseguentemente $x(4y-1) = 1-y$ con $x = \dfrac{1-y}{4y-1}$; espressione dell'inversa: $y = \dfrac{1-x}{4x-1}$.

3) Siano dati gli insiemi $A =]-10, 0[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: -5 \le x \le 1\}$. Determinare l'insieme $C(A \cap B)$ ed il suo insieme chiusura $\overline{C(A \cap B)}$. (Con $C(X)$ indichiamo l'insieme complementare di X)

$B = \{x \in \mathbb{R}: -5 \le x \le 1\} = [-5, 1]$; $A \cap B =]-10, 0[\cap [-5, 1] = [-5, 0[$;
$C(A \cap B) =]-\infty, -5[\cup [0, +\infty[$; $\overline{C(A \cap B)} =]-\infty, -5] \cup [0, +\infty[$.

4) Date le funzioni $f(x) = 3^{1+x}$ e $g(x) = log\,(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 3.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^{1+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$; A$(0, 3)$.

Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$\begin{cases} y = log\,(x-k) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log\,(x-k) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - k = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k+1 \\ y = 0 \end{cases}$;

B$(k+1, 0)$. Il triangolo AOB è rappresentato nella fugura della seconda pagina con base $\overline{\text{OB}} = k+1$, altezza $\overline{\text{OA}} = 3$ e area

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\text{OB}} \cdot \overline{\text{OA}} = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot 3 = \frac{3}{2}(k+1)$; posto $\frac{3}{2}(k+1) = 3$, si ottiene facilmente $k = 1$.

5) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$.

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$r \Rightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

.