Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)
8 gennaio 2024

Compito $\mathbb{G}1$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)$.

1)

p	q	$p\ e\ q$	$q \Rightarrow p$	$\neg(q \Rightarrow p)$	$(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V

.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{x-6}{3x}$, sia inoltre $f(g(x)) = \dfrac{x+4}{x}$.
Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = \dfrac{x-6}{3x}$ si ottiene $f(g(x)) = \dfrac{g(x)-6}{3g(x)}$, posto $\dfrac{g(x)-6}{3g(x)} = \dfrac{x+4}{x}$ si ha $g(x)\cdot x - 6x = 3g(x)\cdot x + 12g(x)$, da cui $2g(x)\cdot(x+6) = -6x$ ed infine $g(x) = -\dfrac{3x}{x+6}$.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x-6}{3x}\right) = -\frac{3\cdot\frac{x-6}{3x}}{\frac{x-6}{3x}+6} = -\frac{3(x-6)}{19x-6}.$$

3) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-2,4]$ e $\mathcal{I}_2 =]e, +\infty[$. Determinare gli insiemi $A = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1) \cap \mathcal{I}_2$ e $B = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

3) $A = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1) \cap \mathcal{I}_2 = (]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[) \cap]e, +\infty[=]4, +\infty[$.
$B = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) = \mathcal{C}([-2,4] \cup]e, +\infty[) = \mathcal{C}([-2, +\infty[) =]-\infty, -2[$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+tg(2x)}{sen\,x}$; $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^{2x+\frac{6}{x^3}}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+tg(2x)}{sen\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2\cdot\frac{tg(2x)}{2x}}{\frac{sen\,x}{x}} = \frac{1+2\cdot(\to 1)}{(\to 1)} = 3.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+tg(2x)}{sen\,x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+tg(2x)}{sen\,x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{1+(1+tg^2(2x))\cdot 2}{cos\,x} = \frac{1+(\to 1)\cdot 2}{(\to 1)} = 3.$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{2x+\frac{6}{x^3}} = e^{(\to-\infty)+(\to 0)} = 0.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = (1-x)e^x$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (1-(-x))e^{-x} = (1+x)e^{-x}$. $y(-x)$ è diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$; funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $y > 0$ se e solo se $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Funzione positiva in $]-\infty, 1[$, negativa in $]1, +\infty[$; unico punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A(1,0)$. $y(0) = (1-0)e^0 = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} = 0$; in quanto per $x \to -\infty$, $1 - x = o(e - {}^x)$; $AOsx$ di equazione $y = 0$. Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} (1-x)e^x = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x)e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x = -\infty$. A destra la funzione non presenta asintoto.

Crescenza e decrescenza: $y' = (-1)e^x + (1-x)e^x = -xe^x$. $y' > 0$, se $-xe^x > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 0[$, strettamente decrescente in $]0, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(0,1)$.

Concavità e convessità: $y'' = (-1)e^x - xe^x = -(1+x)e^x$. $y'' > 0$, se $1 + x < 0 \Rightarrow x < -1$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, -1[$, strettamente concava in $]-1, +\infty[$. Punto di flesso $F\left(-1, 2e^{-1}\right)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):

.

6) (8 punti) Calcolare $\int_4^9 \left(\frac{\sqrt{x} - x}{2\sqrt{x}}\right) dx$.

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_4^9 \left(\frac{\sqrt{x} - x}{2\sqrt{x}}\right) dx = \int_4^9 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx = \int_4^9 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)_4^9 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x\sqrt{x}\right)_4^9 = \left(\frac{9}{2} - 9\right) - \left(2 - \frac{8}{3}\right) =$$

$$-\frac{9}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{23}{6}.$$

Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione: posto $\sqrt{x} = t$, si ottiene $x = t^2$ da cui $dx = 2t\,dt$, quindi:

$$\int_4^9 \left(\frac{\sqrt{x} - x}{2\sqrt{x}} \right) dx \;=\; \int_2^3 \left(\frac{t - t^2}{\cancel{2}t} \right) \cancel{2}t\,dt \;=\; \int_2^3 \left(t - t^2\right) dt \;=$$
$$\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right)_2^3 \;=\; \left(\frac{9}{2} - 9 \right) - \left(2 - \frac{8}{3} \right) \;=\; -\frac{9}{2} + \frac{2}{3} \;=\; -\frac{23}{6}\,.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^x + 4(x-2)$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$, e determinare l'unico punto che soddisfa il Teorema nell'intervallo dato.

7) y è funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, quindi ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$. $y(2) = e^2$, $y(0) = -7$, $\dfrac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = \dfrac{e^2 + 7}{2}$, $y' = e^x + 4$. Posto $e^x + 4 = \dfrac{e^2 + 7}{2}$ risulta $e^x = \dfrac{e^2 + 7}{2} - 4 = \dfrac{e^2 - 1}{2}$, da cui $x = log\left(\dfrac{e^2 - 1}{2} \right) \approx 1.16$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x, y, z, w) = w^3 - 2z + sen\left(x - y^2\right)$.

8) $f'_x = cos(x - y^2)$; $\quad f'_y = -2y \cdot cos(x - y^2)$;
$f'_z = -2$; $\quad f'_w = 3w^2$.

Compito $\mathbb{G}2$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(p \Leftrightarrow q)\ o\ (q \Rightarrow p)$.

1)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$q \Rightarrow p$	$\neg(p \Leftrightarrow q)\ o\ (q \Rightarrow p)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V

.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{8 - 2x}{x}$, sia inoltre $f(g(x)) = \dfrac{2x - 3}{2x}$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = \dfrac{8 - 2x}{x}$ si ottiene $f(g(x)) = \dfrac{8 - 2g(x)}{g(x)}$, posto $\dfrac{8 - 2g(x)}{g(x)} = \dfrac{2x - 3}{2x}$ si ha $16x - 4g(x) \cdot x = 2g(x) \cdot x - 3g(x)$, da cui $3g(x) \cdot (2x - 1) = 16x$ ed infine $g(x) = \dfrac{16x}{3(2x - 1)}$.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{8 - 2x}{x} \right) = \frac{16 \cdot \frac{8-2x}{x}}{3\left(2 \cdot \frac{8-2x}{x} - 1\right)} = \frac{32(4 - x)}{3(16 - 5x)}\,.$$

3) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [2, 2\pi]$ e $\mathcal{I}_2 =]6, 20[$. Determinare gli insiemi $A = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{C}(\mathcal{I}_2)$ e $B = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

3) $A = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{C}(\mathcal{I}_2) = [2, 2\pi] \cup \mathcal{C}(]6, 20[) = [2, 2\pi] \cup (] -\infty, 6] \cup [20, +\infty[) =$
$] -\infty, 2\pi] \cup [20, +\infty[$.
$B = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) = \mathcal{C}([2, 2\pi] \cap]6, 20[) = \mathcal{C}(]6, 2\pi]) =] -\infty, 6] \cup]2\pi, +\infty[$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - cos\,x}{x}$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{x - \frac{2}{x^2}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{1 - \cos x}{x} = (\to 1) + (\to 0) = 1$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + sen\, x}{1} = \dfrac{(\to 1) + (\to 0)}{1} = 1.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - \frac{2}{x^2}} = e^{(\to +\infty) - (\to 0)} = +\infty.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = (3 + x)e^{-x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (3 + (-x))e^{-(-x)} = (3 - x)e^x$. $y(-x)$ è diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$; funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $e^{-x} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $y > 0$ se e solo se $3 + x > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Funzione negativa in $]-\infty, -3[$, positiva in $]-3, +\infty[$; unico punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A(-3, 0)$.

$y(0) = (3 + 0)e^0 = 3$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3 + x)e^{-x} = -\infty.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(3 + x)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3}{x} + 1\right)e^{-x} = +\infty$. A sinistra la funzione non presenta asintoto.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3 + x)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + x}{e^x} = 0$; in quanto per $x \to +\infty$, $3 + x = o(e^x)$; $AOdx$ di equazione $y = 0$. Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3 + x)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + x}{e^x} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + x}{e^x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

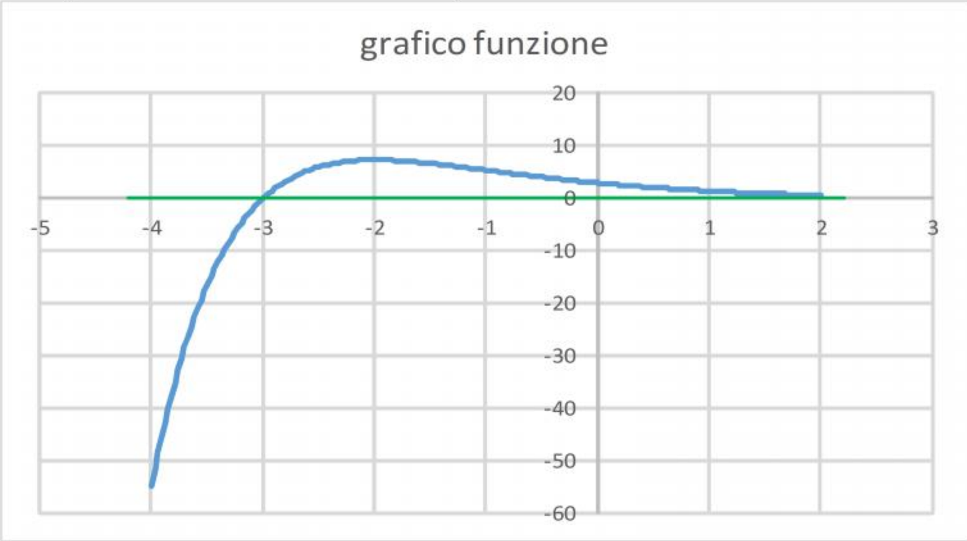
Crescenza e decrescenza: $y' = 1 \cdot e^{-x} + (3 + x)e^{-x} \cdot (-1) = -(2 + x)e^{-x}$.

$y' > 0$, se $-(2 + x)e^{-x} > 0 \Rightarrow 2 + x < 0 \Rightarrow x < -2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -2[$, strettamente decrescente in $]-2, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(-2, e^2)$.

Concavità e convessità: $y'' = (-1)e^{-x} - (2 + x)e^{-x} \cdot (-1) = (1 + x)e^{-x}$.

$y'' > 0$, se $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, -1[$, strettamente convessa in $]-1, +\infty[$. Punto di flesso $F(-1, 2e)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^{16}\left(\frac{2+x}{3\sqrt{x}}\right)dx\,.$

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^{16}\left(\frac{2+x}{3\sqrt{x}}\right)dx\;=\;\int_1^{16}\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{3}\right)dx\;=\;\int_1^{16}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)dx\;=$$

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)_1^{16}\;=\;\left(\frac{4}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{9}x\sqrt{x}\right)_1^{16}\;=$$

$$\left(\frac{16}{3}+\frac{128}{9}\right)-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{9}\right)\;=\;\frac{176}{9}-\frac{14}{9}\;=\;18\,.$$

Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione: posto $\sqrt{x}=t$, si ottiene $x=t^2$ da cui $dx=2t\,dt$, quindi:

$$\int_1^{16}\left(\frac{2+x}{3\sqrt{x}}\right)dx\;=\;\int_1^{4}\left(\frac{2+t^2}{3\cancel{t}}\right)2\cancel{t}\,dt\;=\;\int_1^{4}\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}t^2\right)dt\;=$$

$$\left(\frac{4}{3}t+\frac{2}{9}t^3\right)_1^{4}\;=\;\left(\frac{16}{3}+\frac{128}{9}\right)-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{9}\right)\;=\;\frac{176}{9}-\frac{14}{9}\;=\;18\,.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y=e^{x-2}+3x$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$, e determinare l'unico punto che soddisfa il Teorema nell'intervallo dato.

7) y è funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, quindi ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$. $y(2)=7$, $y(0)=e^{-2}$, $\frac{y(2)-y(0)}{2-0}=\frac{7-e^{-2}}{2}$,

$y'=e^{x-2}+3$. Posto $e^{x-2}+3=\frac{7-e^{-2}}{2}$ risulta $e^{x-2}=\frac{7-e^{-2}}{2}-3=\frac{1-e^{-2}}{2}$,

da cui $x-2=log\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)$ con $x=\;2+log\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)\;\approx 1.16$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x,\,y,\,z,\,w)=z^4-log(y+xw)\,.$

8) $\qquad f'_x=\;-\frac{w}{y+xw}\,;\qquad\qquad f'_y=\;-\frac{1}{y+xw}\,;$

$$f'_z = 4z^3; \qquad\qquad f'_w = -\frac{x}{y+xw}.$$

Compito $\mathbb{G}3$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg\Big((p \Rightarrow q)\ e\ (q \Leftrightarrow p)\Big)$.

1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$	$(p \Rightarrow q)\ e\ (q \Leftrightarrow p)$	$\neg\Big((p \Rightarrow q)\ e\ (q \Leftrightarrow p)\Big)$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$, sia inoltre $f(g(x)) = \dfrac{1+x}{3x}$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$ si ottiene $f(g(x)) = \dfrac{3-g(x)}{g(x)}$, posto $\dfrac{3-g(x)}{g(x)} = \dfrac{1+x}{3x}$ si ha $9x - 3g(x)\cdot x = g(x) + g(x)\cdot x$, da cui $g(x)\cdot(4x+1) = 9x$ ed infine $g(x) = \dfrac{9x}{4x+1}$.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{3-x}{x}\right) = \frac{9\cdot\frac{3-x}{x}}{4\cdot\frac{3-x}{x}+1} = \frac{3(3-x)}{4-x}.$$

3) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 =]-\infty, 5[$ e $\mathcal{I}_2 =]e, 7[$. Determinare gli insiemi $A = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ e $B = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{C}(\mathcal{I}_2)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

3) $A = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) = \mathcal{C}(]-\infty,5[\cap]e,7[) = \mathcal{C}(]e,5[) =]-\infty, e] \cup [5, +\infty[$.
$B = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{C}(\mathcal{I}_2) =]-\infty,5[\cup \mathcal{C}(]e,7[) =]-\infty,5[\cup (]-\infty,e] \cup [7,+\infty[) =]-\infty,5[\cup [7,+\infty[$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{sen\,x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} e^{4x+\frac{1}{x^2}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{sen\,x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{sen\,x}-1}{sen\,x} \cdot \dfrac{sen\,x}{x} = (\to 1)\cdot(\to 1) = 1$.
Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{sen\,x}-1}{x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{sen\,x}-1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^{sen\,x}\cdot cos\,x}{1} = \frac{(\to 1)\cdot(\to 1)}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} e^{4x+\frac{1}{x^2}} = e^{(\to 0)+(\to+\infty)} = +\infty.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = xe^{2-x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = -xe^{2-(-x)} = -xe^{2+x}$. $y(-x)$ è diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$; funzione né pari né dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $e^{2-x} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $y > 0$ se e solo se $x > 0$. Funzione negativa in $]-\infty, 0[$, positiva in $]0, +\infty[$; unico punto di intersezione con gli assi $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} xe^{2-x} = -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{2-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{2-x} = +\infty$. A sinistra la funzione non presenta asintoto.

$\lim_{x \to +\infty} xe^{2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} = 0$; in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^{x-2})$; $AOdx$ di equazione $y = 0$. Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti

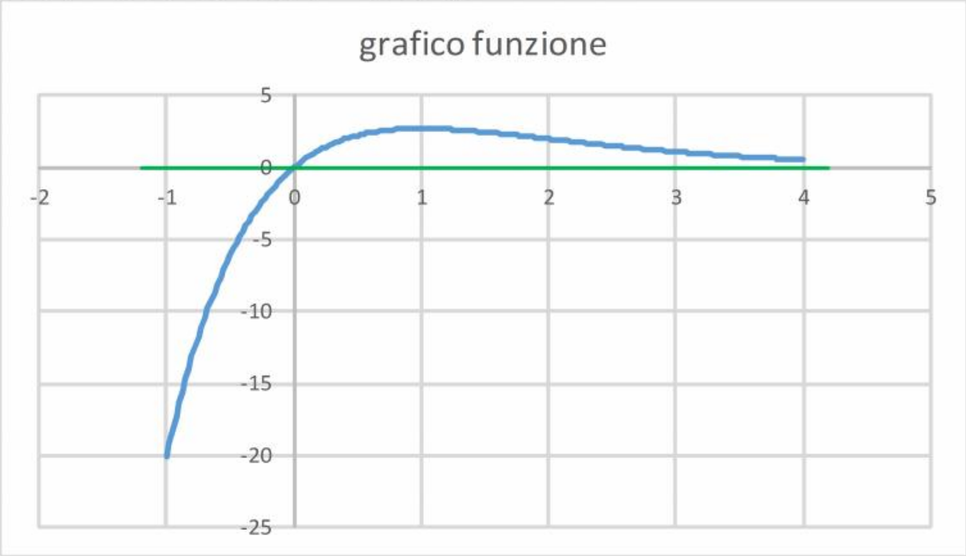
$\lim_{x \to +\infty} xe^{2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = 1 \cdot e^{2-x} + xe^{2-x} \cdot (-1) = (1-x)e^{2-x}$. $y' > 0$, se $(1-x)e^{2-x} > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 1[$, strettamente decrescente in $]1, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(1, e)$.

Concavità e convessità: $y'' = (-1)e^{2-x} + (1-x)e^{2-x} \cdot (-1) = (x-2)e^{2-x}$. $y'' > 0$, se $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 2[$, strettamente convessa in $]2, +\infty[$. Punto di flesso $F(2, 2)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^4 \left(\frac{x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx$.

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^4 \left(\frac{x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 (\sqrt{x} + 3)\, dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + 3 \right) dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 3x \right)_1^4 = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x \right)_1^4 = \left(\frac{16}{3} + 12 \right) - \left(\frac{2}{3} + 3 \right) = \frac{52}{3} - \frac{11}{3} = \frac{41}{3}.$$

Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione: posto $\sqrt{x} = t$, si ottiene $x = t^2$ da cui $dx = 2t\, dt$, quindi:

$$\int_1^4 \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{t^2+3t}{\cancel{t}} \right) 2\cancel{t}\, dt = \int_1^2 \left(2t^2+6t\right) dt =$$
$$\left(\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 \right)_1^2 = \left(\frac{16}{3} + 12 \right) - \left(\frac{2}{3} + 3 \right) = \frac{52}{3} - \frac{11}{3} = \frac{41}{3}.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^{x+1} - 5x$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$, e determinare l'unico punto che soddisfa il Teorema nell'intervallo dato.

7) y è funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, quindi ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$. $y(1) = e^2 - 5$, $y(0) = e$, $\frac{y(1)-y(0)}{1-0} = e^2 - 5 - e$, $y' = e^{x+1} - 5$. Posto $e^{x+1} - 5 = e^2 - 5 - e$ risulta $e^{x+1} = e^2 - e$, da cui $x + 1 = log\left(e^2 - e\right)$ con $x = log\left(e^2 - e\right) - 1 = log(e-1) \approx 0.54$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x,\, y,\, z,\, w) = z^3 - x + sen\, w + log(3-y)$.

8) $f'_x = -1$; $\quad f'_y = -\frac{1}{3-y}$;

$f'_z = 3z^2$; $\quad f'_w = cos\, w$.

Compito $\mathbb{G}4$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q\ e\ p)$.

1)

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$q\ e\ p$	$(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q\ e\ p)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \frac{x+2}{3x}$, sia inoltre $f(g(x)) = \frac{1-x}{x}$.
Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = \frac{x+2}{3x}$ si ottiene $f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{3g(x)}$, posto $\frac{g(x)+2}{3g(x)} = \frac{1-x}{x}$ si ha $g(x) \cdot x + 2x = 3g(x) - 3g(x) \cdot x$, da cui $g(x) \cdot (3-4x) = 2x$ ed infine $g(x) = \frac{2x}{3-4x}$.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{3x} \right) = \frac{2 \cdot \frac{x+2}{3x}}{3 - 4 \cdot \frac{x+2}{3x}} = \frac{2(x+2)}{5x-8}.$$

3) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-e, 3]$ e $\mathcal{I}_2 = [-4, 0]$. Determinare gli insiemi $A = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$ e $B = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1) \cap \mathcal{I}_2$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

3) $A = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) = \mathcal{C}([-e,3] \cup [-4,0]) = \mathcal{C}([-4,3]) =]-\infty,\, -4[\cup]3,\, +\infty[$.
$B = \mathcal{C}(\mathcal{I}_1) \cap \mathcal{I}_2 = \mathcal{C}([-e,3]) \cap [-4,0] =$
$(]-\infty,\, -e[\cup]3,\, +\infty[) \cap [-4,0] = [-4,\, -e[$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{log(1-2x)}{sen\, x}$; $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x-\frac{6}{x^4}}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(1-2x)}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} -2 \cdot \frac{\frac{log(1-2x)}{-2x}}{\frac{sen\, x}{x}} = -2 \cdot \frac{(\to 1)}{(\to 1)} = -2 \cdot .$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{log(1-2x)}{sen\, x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to 0} \frac{log(1-2x)}{sen\, x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2}{1-2x}}{cos\, x} = \frac{(\to -2)}{(\to 1)} = -2.$

$\lim_{x \to 0} e^{-x-\frac{6}{x^4}} = e^{(\to 0)-(\to +\infty)} = 0.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = -xe^{1+x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = -(-x)e^{1+(-x)} = xe^{1-x}$. $y(-x)$ è diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$; funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $e^{1+x} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $y > 0$ se e solo se $-x > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione positiva in $]-\infty, 0[$, negativa in $]0, +\infty[$; unico punto di intersezione con gli assi $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} -xe^{1+x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-(1+x)}} = 0$; in quanto per $x \to -\infty$, $-x = o\left(e^{-(1+x)}\right)$; $AOsx$ di equazione $y = 0$. Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti

$\lim_{x \to -\infty} -xe^{1+x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-(1+x)}} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema: $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-(1+x)}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-e^{-(1+x)}} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} -xe^{1+x} = -\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-xe^{1+x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} -e^{1+x} = -\infty$. A destra la funzione non presenta asintoto.

Crescenza e decrescenza: $y' = -1 \cdot e^{1+x} - xe^{1+x} = -(1+x)e^{1+x}$. $y' > 0$, se $-(1+x)e^{1+x} > 0 \Rightarrow 1+x < 0 \Rightarrow x < -1$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -1[$, strettamente decrescente in $]-1, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(-1, 1)$.

Concavità e convessità: $y'' = -1 \cdot e^{1+x} - (1+x)e^{1+x} = -(2+x)e^{1+x}$. $y'' > 0$, se $2 + x < 0 \Rightarrow x < -2$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, -2[$, strettamente concava in $]-2, +\infty[$. Punto di flesso $F\left(-2, 2e^{-1}\right)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):

.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^9 \left(\frac{1+3x}{\sqrt{x}}\right) dx$.

6) *Primo Metodo - Integrazione Diretta*:

$$\int_1^9 \left(\frac{1+3x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right) dx = \int_1^9 \left(x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)_1^9 = \left(2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}\right)_1^9 = (6+54) - (2+2) = 56.$$

Secondo Metodo - Integrazione per Sostituzione: posto $\sqrt{x} = t$, si ottiene $x = t^2$ da cui $dx = 2t\,dt$, quindi:

$$\int_1^9 \left(\frac{1+3x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^3 \left(\frac{1+3t^2}{\cancel{t}}\right) 2\cancel{t}\,dt = \int_1^3 \left(2+6t^2\right) dt =$$

$$\left(2t+2t^3\right)_1^3 = (6+54) - (2+2) = 56.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^x + 3(1-x)$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$, e determinare l'unico punto che soddisfa il Teorema nell'intervallo dato.

7) y è funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, quindi ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$. $y(1) = e$, $y(0) = 4$, $\dfrac{y(1)-y(0)}{1-0} = e-4$,

$y' = e^x - 3$. Posto $e^x - 3 = e - 4$ risulta $e^x = e - 1$, da cui

$x = log(e-1) \approx 0.54$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:

$f(x,\, y,\, z,\, w) = (w-z)^2 + cos(3x-y)$.

8) $f'_x = -3\,sen(3x-y)$; $f'_y = sen(3x-y)$;

$f'_z = -2(w-z)$; $f'_w = 2(w-z)$.