Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)
5 febbraio 2024
Compito $\mathbb{F}1$

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-2,4]$ e $\mathcal{I}_2 =]e, +\infty[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 =]-e,4]$ e $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 =]e,3[$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).

1) Da $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 =]-e,4]$ si ottiene $Inf(\mathcal{I}_3) = -e, -e \notin \mathcal{I}_3$ e $-2 \le Sup(\mathcal{I}_3) \le 4$; da $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 =]e,3[$ si ottiene $Sup(\mathcal{I}_3) = 3$ e $3 \notin \mathcal{I}_3$, quindi $\mathcal{I}_3 =]-e,3[$.
$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 = [-2,4] \cap]e,+\infty[\cap]-e,3[=]e,3[$;
$\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3) = \mathcal{C}(]e,3[) =]-\infty,e] \cup [3,+\infty[$.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^{3x-1}$, sia inoltre $f(g(x)) = 3x-4$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = e^{3x-1}$ si ottiene $f(g(x)) = e^{3g(x)-1}$, posto $e^{3g(x)-1} = 3x-4$ si ha $3g(x)-1 = log(3x-4)$, da cui $g(x) = \dfrac{1+log(3x-4)}{3}$.
$$g(f(x)) = g\left(e^{3x-1}\right) = \frac{1+log(3e^{3x-1}-4)}{3}.$$

3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x \le 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 9 < 3^{2x-1} < 81\}$. Determinare l'insieme frontiera dell'unione fra A e B, $\delta(A \cup B)$; e l'insieme derivato dell'intersezione fra A e B, $\mathcal{D}(A \cap B)$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?

3) $B = \{x \in \mathbb{R}: 9 < 3^{2x-1} < 81\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^2 < 3^{2x-1} < 3^4\} = \{x \in \mathbb{R}: 2 < 2x-1 < 4\} = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\}$.
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: x \le 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\} = \{x \in \mathbb{R}: x < \frac{5}{2}\}$, insieme aperto; $\delta(A \cup B) = \{\frac{5}{2}\}$.
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: x \le 2\} \cap \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\} = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x \le 2\}$, insieme né aperto né chiuso; $\mathcal{D}(A \cap B) = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} \le x \le 2\}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{sen\,x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{2+x}\right)^{2+x}$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{sen\,x} = \lim_{x \to 0} -\frac{\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\frac{sen\,x}{x}} = -\frac{\left(\to \frac{1}{3}\right)}{(\to 1)} = -\frac{1}{3}.$$
Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{sen\,x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{sen\,x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x)^2}}}{cos\,x} = \frac{\left(\to -\frac{1}{3}\right)}{(\to 1)} = -\frac{1}{3}.$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{3}{2+x}\right)^{2+x} = e^3.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{1-x^2}{x}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione non presenta punti di flesso)

5) $C.E.: x \ne 0, C.E. =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1-(-x)^2}{-x} = -\frac{1-x^2}{x} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: se $x > 0$, $y > 0$ se e solo se $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. Funzione positiva in $]0, 1[$, negativa in $]1, +\infty[$; unico punto di intersezione con l'asse positivo delle ascisse $A(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-x^2}{x} = \frac{(\to 1)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AsV di equazione $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - x = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$.

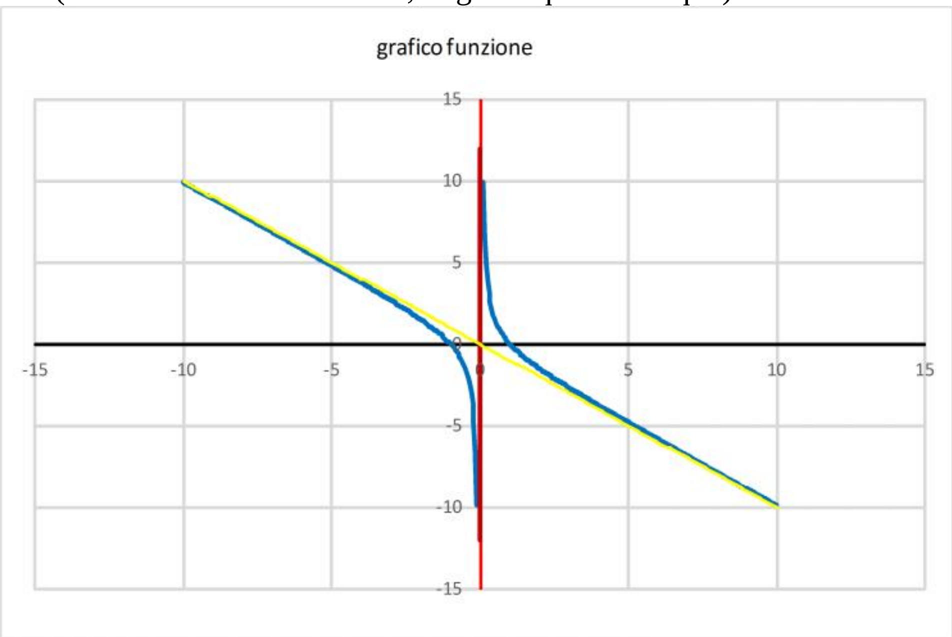
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1-x^2}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} y + x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{x} + x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $AsObDx$ di equazione $y = -x$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-2x \cdot x - (1-x^2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{1+x^2}{x^2}$. $y' < 0$, $\forall x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: la presenza dei due asintoti, insieme alla stretta decrescenza e all'assenza di punti di flesso, implicano che la funzione è strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale, in giallo quello obliquo):



6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\int_0^{2k} x^2\, dx = \int_0^k x\, dx$.

6) $\int_0^{2k} x^2\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^{2k} = \frac{8}{3}k^3$; $\int_0^k x\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^k = \frac{1}{2}k^2$. Posto $\frac{8}{3}k^3 = \frac{1}{2}k^2$ si ottiene come unica soluzione positiva $k = \frac{3}{16}$.

7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} h-k \\ h \\ 3k \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h-k \\ h \\ 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h-6k \\ -3h+9k \\ 5h \end{pmatrix}$; con $\begin{pmatrix} 3h-6k \\ -3h+9k \\ 5h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ risulta $h=1$ e $k=2$.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = sen(6x+y) + 2y$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0$, $\nabla z = (cos(6x+y) \cdot 6, cos(6x+y)+2)$, $\nabla z(P) = (6,3)$. Equazione del piano tangente: $z = 6x+3y$, oppure $6x+3y-z=0$.

Compito $\mathbb{F}2$

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [2, 2\pi]$ e $\mathcal{I}_2 =]6, 20[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 =]\pi, 2\pi]$ e $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]\pi, 25]$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).

1) Da $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 =]\pi, 2\pi]$ si ottiene $Inf(\mathcal{I}_3) = \pi$, $\pi \notin \mathcal{I}_3$ e $Sup(\mathcal{I}_3) \leq 2\pi$; da $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]\pi, 25]$ si ottiene $Sup(\mathcal{I}_3) = 25$ e $25 \in \mathcal{I}_3$, quindi $\mathcal{I}_3 =]\pi, 25]$.
$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 = [2, 2\pi] \cup]6, 20[\cup]\pi, 25] = [2, 25]$;
$\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3) = \mathcal{C}([2,25]) =]-\infty, 2[\cup]25, +\infty[$.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = 2^{1-x}$, sia inoltre $f(g(x)) = -x$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(2x-1)$.

2) Da $f(x) = 2^{1-x}$ si ottiene $f(g(x)) = 2^{1-g(x)}$, posto $2^{1-g(x)} = -x$ si ha $1 - g(x) = log_2(-x)$, da cui $g(x) = 1 - log_2(-x)$.
$g(2x-1) = 1 - log_2(-(2x-1)) = 1 - log_2(1-2x)$.

3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 8 < 2^{3x-1} < 64\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$. Determinare l'insieme derivato dell'unione fra A e B, $\mathcal{D}(A \cup B)$; e l'insieme frontiera dell'intersezione fra A e B, $\delta(A \cap B)$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: 8 < 2^{3x-1} < 64\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^3 < 2^{3x-1} < 2^6\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: 3 < 3x-1 < 6\} = \{x \in \mathbb{R}: \frac{4}{3} < x < \frac{7}{3}\}$.
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: \frac{4}{3} < x < \frac{7}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x < \frac{7}{3}\}$, insieme aperto; $\mathcal{D}(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{7}{3}\}$.
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: \frac{4}{3} < x < \frac{7}{3}\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: \frac{4}{3} < x \leq 2\}$, insieme né aperto né chiuso; $\delta(A \cap B) = \{\frac{4}{3}, 2\}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+tg\,x}-1}{x}$;

$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{3+x}\right)^{3+x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+tg\,x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+tg\,x}-1}{tg\,x} \cdot \frac{tg\,x}{x} = \left(\to \frac{1}{4}\right) \cdot (\to 1) = \frac{1}{4}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+tg\,x}-1}{x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+tg\,x}-1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{(1+tg\,x)^3}} \cdot (1+tg^2\,x)}{1} = \frac{(\to \frac{1}{4})}{(\to 1)} = \frac{1}{4}$.

$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{3+x}\right)^{3+x} = e$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{1+x^2}{x}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione non presenta punti di flesso)

5) $C.E.$: $x \neq 0$, $C.E. =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{-x} = -\frac{1+x^2}{x} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in]0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: se $x > 0$, $y > 0$, $\forall x > 0$. Funzione positiva in $]0, +\infty[$; nessuna intersezione con gli assi cartesiani.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1+x^2}{x} = \frac{(\to 1)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AsV di equazione $x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty$.

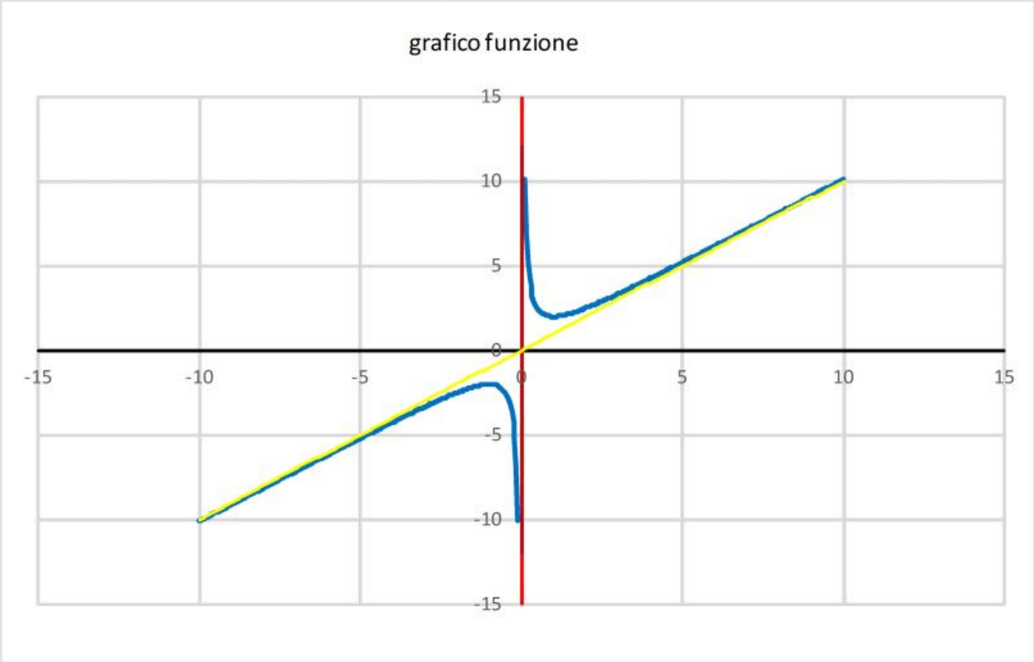
$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1+x^2}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = 1$;

$\lim_{x \to +\infty} y - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $AsObDx$ di equazione $y = x$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{2x \cdot x - (1+x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. $y' > 0$ se $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$. Funzione strettamente decrescente in $]0, 1[$, strettamente crescente in $]1, +\infty[$. Punto di minimo relativo in $m(1, 2)$.

Concavità e convessità: la presenza dei due asintoti, insieme al punto di minimo e all'assenza di punti di flesso, implicano che la funzione è strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale, in giallo quello obliquo):



6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\int_0^{3k} x^2\,dx = \int_0^k x\,dx$.

6) $\int_0^{3k} x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^{3k} = 9k^3$; $\int_0^k x\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^k = \frac{1}{2}k^2$. Posto $9k^3 = \frac{1}{2}k^2$ si ottiene come unica soluzione positiva $k = \frac{1}{18}$.

7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} h \\ h+k \\ k \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?

7) $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ h+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h+2k \\ 5h+4k \end{pmatrix}$; con $\begin{pmatrix} 2h+2k \\ 5h+4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ risulta $h = 2$ e $k = -1$.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = cos(x-2y) - 3x$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$z(P) = 1$, $\nabla z = (-sen(x-2y) - 3, \ -sen(x-2y)\cdot(-2))$, $\nabla z(P) = (-3, 0)$. Equazione del piano tangente: $z - 1 = -3x$, oppure $3x + z = 1$.

Compito $\mathbb{F}3$

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 =]-\infty, 5[$ e $\mathcal{I}_2 =]e, 7[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 =]-e, 5[$ e $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 =]e, 6]$. Dopo aver

determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).

1) Da $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 =]-e, 5[$ si ottiene $Inf(\mathcal{I}_3) = -e,\ -e \notin \mathcal{I}_3$ e $Sup(\mathcal{I}_3) \geq 5$; da $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 =]e, 6]$ si ottiene $Sup(\mathcal{I}_3) = 6$ e $6 \in \mathcal{I}_3$, quindi $\mathcal{I}_3 =]-e, 6]$.
$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]-\infty, 5[\cup]e, 7[\cup]-e, 6] =]-\infty, 7[$;
$\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3) = \mathcal{C}(]-\infty, 7[) = [7, +\infty[$.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = 4^{x-1}$, sia inoltre $f(g(x)) = 2x$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(1-x)$.

2) Da $f(x) = 4^{x-1}$ si ottiene $f(g(x)) = 4^{g(x)-1}$, posto $4^{g(x)-1} = 2x$ si ha $g(x) - 1 = log_4(2x)$, da cui $g(x) = 1 + log_4(2x)$.
$g(1-x) = 1 + log_4(2(1-x)) = 1 + log_4(2-2x)$.

3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 1 < 2^{x-2} < 8\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 4\right\}$. Determinare l'insieme frontiera dell'intersezione fra A e B, $\delta(A \cap B)$; e l'insieme interno dell'unione fra A e B, $\overset{\circ}{\overline{(A \cup B)}}$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?

3) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 1 < 2^{x-2} < 8\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2^0 < 2^{x-2} < 2^3\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x-2 < 3\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2 < x < 5\right\}$.
$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2 < x < 5\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 4\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2 < x \leq 4\right\}$, insieme né aperto né chiuso; $\delta(A \cap B) = \left\{2, 4\right\}$.
$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2 < x < 5\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 4\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon x < 5\right\}$, insieme aperto; $\overset{\circ}{\overline{(A \cup B)}} = A \cup B$, in quanto $A \cup B$ è un insieme aperto.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{x}$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{4+x}\right)^{4+x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{sen\,x} \cdot \dfrac{sen\,x}{x} = \left(\to \dfrac{1}{2}\right) \cdot (\to 1) = \dfrac{1}{2}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

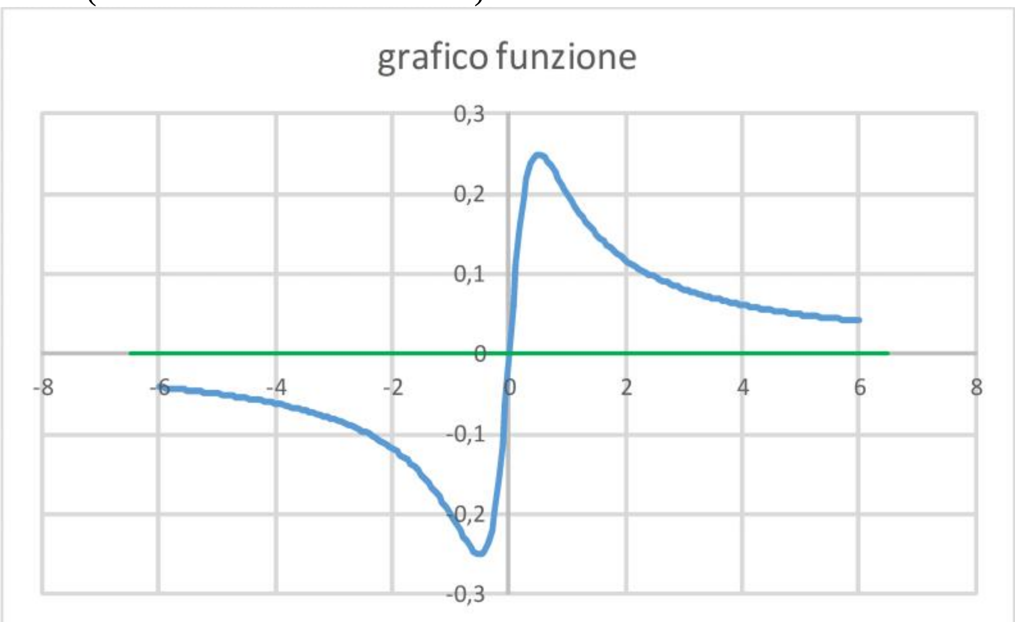
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + sen\,x}} \cdot cos\,x}{1} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{4+x}\right)^{4+x} = e^{-1}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{x}{1 + 4x^2}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta tre punti di flesso)

5) $C.E.$: $1 + 4x^2 \neq 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$. $C.E. = \mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = \dfrac{-x}{1 + 4(-x)^2} = -\dfrac{x}{1 + 4x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: se $x > 0$, $y > 0$, $\forall x > 0$. Funzione positiva in $]0, +\infty[$; $y(0) = 0$, unica intersezione con gli assi cartesiani in $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+4x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\frac{1}{x}+4x)} = \frac{1}{(\to +\infty)} = 0$; $AsOrDx$ di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1 \cdot (1+4x^2) - x \cdot 8x}{(1+4x^2)^2} = \frac{1-4x^2}{(1+4x^2)^2}$. $y' > 0$ se $1 - 4x^2 > 0 \Rightarrow 4x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$. Funzione strettamente crescente in $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, strettamente decrescente in $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Punto di massimo assoluto in $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Concavità e convessità: la presenza dell'asintoto, insieme al punto di massimo ed ai tre di punti di flesso, implicano che la funzione è strettamente concava in $]0, \alpha[$ e strettamente convessa in $]\alpha, +\infty[$, dove $\alpha > \frac{1}{2}$ è l'ascissa di un punto di flesso, per la simmetria della funzione, $O(0,0)$ è punto di flesso.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\int_0^{4k} x^2\,dx = \int_0^k x\,dx$.

6) $\int_0^{4k} x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^{4k} = \frac{64}{3}k^3$; $\int_0^k x\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^k = \frac{1}{2}k^2$. Posto $\frac{64}{3}k^3 = \frac{1}{2}k^2$ si ottiene come unica soluzione positiva $k = \frac{3}{128}$.

7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & h & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 3 & h & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3h \\ 3h-3k \end{pmatrix}$; con $\begin{pmatrix} 9-3h \\ 3h-3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ risulta $h = 2$ e $k = 1$.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = y + arctg(3x + y)$ nel punto di coordinate $P(0, 0)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$z(P) = 0,\ \nabla z = \left(\frac{1}{1+(3x+y)^2} \cdot 3, 1 + \frac{1}{1+(3x+y)^2} \right), \nabla z(P) = (3, 2).$$

Equazione del piano tangente: $z = 3x + 2y$, oppure $3x + 2y - z = 0$.

Compito $\mathbb{F}4$

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-e, 3]$ e $\mathcal{I}_2 = [-4, 0]$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 = [-2e, 3]$ e $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]-2e, 2[$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).

1) Da $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 = [-2e, 3]$ si ottiene $Inf(\mathcal{I}_3) = -2e,\ -2e \in \mathcal{I}_3$ e $-e \le Sup(\mathcal{I}_3) \le 3$; $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]-2e, 2[$ si ottiene $Sup(\mathcal{I}_3) = 2$ e $2 \notin \mathcal{I}_3$, quindi $\mathcal{I}_3 = [-2e, 2[$. $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 = [-e, 3] \cap [-4, 0] \cap [-2e, 2[= [-e, 0]$; $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3) = \mathcal{C}([-e, 0]) =]-\infty, -e[\cup]0, +\infty[$.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^{1-5x}$, sia inoltre $f(g(x)) = 3x + 5$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = e^{1-5x}$ si ottiene $f(g(x)) = e^{1-5g(x)}$, posto $e^{1-5g(x)} = 3x + 5$ si ha $1 - 5g(x) = log(3x+5)$, da cui $g(x) = \dfrac{1 - log(3x+5)}{5}$.

$$g(f(x)) = g\left(e^{1-5x}\right) = \frac{1 - log(3e^{1-5x} + 5)}{5}.$$

3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x \le 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 \le 4^{2x} \le 64\}$. Determinare l'insieme derivato dell'intersezione fra A e B, $\mathcal{D}(A \cap B)$; e l'insieme interno dell'unione fra A e B, $\overset{\circ}{\overline{(A \cup B)}}$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?

3) $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 \le 4^{2x} \le 64\} = \{x \in \mathbb{R}: 4^0 \le 4^{2x} \le 4^3\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le 2x \le 3\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le \frac{3}{2}\}$.

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: x \le 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le \frac{3}{2}\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le 1\}$, insieme chiuso; $\mathcal{D}(A \cap B) = A \cap B$, in quanto $A \cap B$ è un insieme chiuso.

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: x \le 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le \frac{3}{2}\} = \{x \in \mathbb{R}: x \le \frac{3}{2}\}$, insieme chiuso; $\overset{\circ}{\overline{(A \cup B)}} = \{x \in \mathbb{R}: x < \frac{3}{2}\}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\ x^2}-1}{x}$;
$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{8+x}\right)^{8+x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\ x^2}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\ x^2}-1}{x^2} \cdot x = \left(\to \frac{1}{3}\right) \cdot (\to 0) = 0$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\ x^2}-1}{x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\ x^2}-1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \cdot 2x}{1} = \frac{(\to 0)}{1} = 0.$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{8+x}\right)^{8+x} = e^2$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{2x}{1+x^2}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta tre punti di flesso)

5) $C.E.$: $1+x^2 \neq 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$. $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: se $x > 0$, $y > 0$, $\forall x > 0$. Funzione positiva in $]0, +\infty[$; $y(0) = 0$, unica intersezione con gli assi cartesiani in $O(0,0)$.

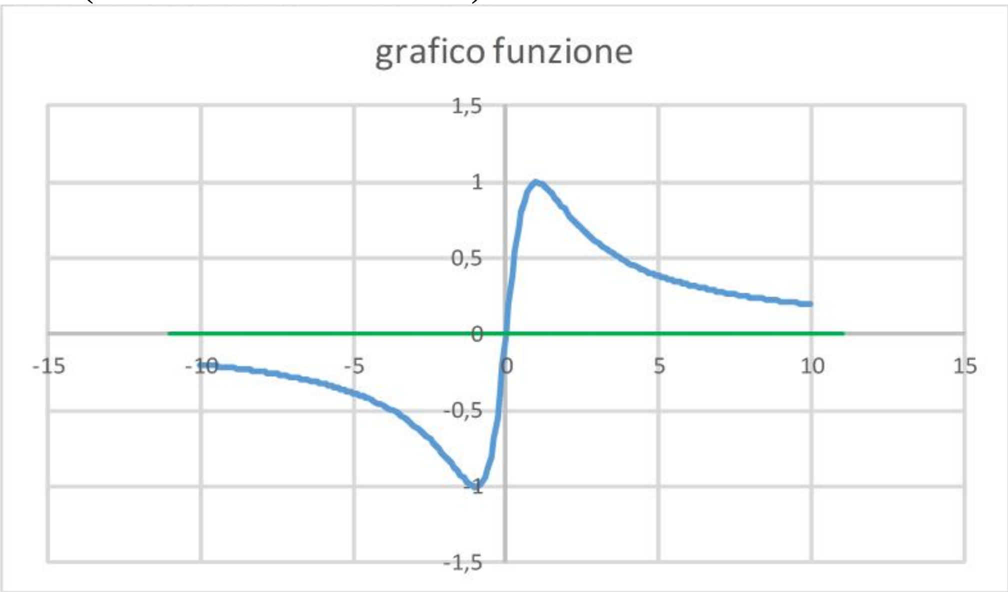
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+x\right)} = \frac{2}{(\to +\infty)} = 0$; $AsOrDx$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. $y' > 0$ se $1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$. Funzione strettamente crescente in $[0,1[$, strettamente decrescente in $]1, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(1,1)$.

Concavità e convessità: la presenza dell'asintoto, insieme al punto di massimo ed ai tre di punti di flesso, implicano che la funzione è strettamente concava in $]0,\alpha[$ e strettamente convessa in $]\alpha, +\infty[$, dove $\alpha > 1$ è l'ascissa di un punto di flesso, per la simmetria della funzione, $O(0,0)$ è punto di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\int_0^k x^2\,dx = \int_0^{3k} x\,dx$.

6) $\int_0^k x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^k = \frac{1}{3}k^3$; $\int_0^{3k} x\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^{3k} = \frac{9}{2}k^2$. Posto $\frac{1}{3}k^3 = \frac{9}{2}k^2$ si ottiene come unica soluzione positiva $k = \frac{27}{2}$.

7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} h & 0 & -1 \\ -3 & 0 & k \\ h & k & -1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?

7) $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} h & -3 & h \\ 0 & 0 & k \\ -1 & k & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6h \\ 5k \\ -6 \end{pmatrix}$; con $\begin{pmatrix} 6h \\ 5k \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$ risulta $h = 1$ e $k = -2$.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = 3y + tg(x - 2y)$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0,\ \nabla z = \left(1 + tg^2(x-2y), 3 + \left(1 + tg^2(x-2y)\right) \cdot (-2)\right)$,
$\nabla z(P) = (1,1)$. Equazione del piano tangente: $z = x + y$, oppure $x + y - z = 0$.