Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

5 febbraio 2024

Compito $\mathbb{F}1$[✓]

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-2,4]$ e $\mathcal{I}_2 =]e, +\infty[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 =]-e,4]$ e $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 =]e,3[$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).
2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^{3x-1}$, sia inoltre $f(g(x)) = 3x - 4$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.
3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \left\{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R}: 9 < 3^{2x-1} < 81\right\}$. Determinare l'insieme frontiera dell'unione fra A e B, $\delta(A \cup B)$; e l'insieme derivato dell'intersezione fra A e B, $\mathcal{D}(A \cap B)$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{sen\, x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{2+x}\right)^{2+x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{1-x^2}{x}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione non presenta punti di flesso)
6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\displaystyle\int_0^{2k} x^2\, dx = \int_0^k x\, dx$.
7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} h-k \\ h \\ 3k \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?
8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = sen(6x+y) + 2y$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

5 febbraio 2024

Compito $\mathbb{F}2^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [2, 2\pi]$ e $\mathcal{I}_2 =]6, 20[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 =]\pi, 2\pi]$ e $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]\pi, 25]$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).
2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = 2^{1-x}$, sia inoltre $f(g(x)) = -x$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(2x-1)$.
3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \left\{x \in \mathbb{R}: 8 < 2^{3x-1} < 64\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\right\}$. Determinare l'insieme derivato dell'unione fra A e B, $\mathcal{D}(A \cup B)$; e l'insieme frontiera dell'intersezione fra A e B, $\delta(A \cap B)$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1 + tg\,x} - 1}{x}$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3+x}\right)^{3+x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{1+x^2}{x}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione non presenta punti di flesso)
6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\displaystyle\int_0^{3k} x^2\,dx = \int_0^{k} x\,dx$.
7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} h \\ h+k \\ k \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?
8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = cos(x - 2y) - 3x$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

5 febbraio 2024

Compito $\mathbb{F}3$✓

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 =]-\infty, 5[$ e $\mathcal{I}_2 =]e, 7[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 =]-e, 5[$ e $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 =]e, 6]$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).
2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = 4^{x-1}$, sia inoltre $f(g(x)) = 2x$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(1-x)$.
3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \left\{x \in \mathbb{R}\colon 1 < 2^{x-2} < 8\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 4\right\}$. Determinare l'insieme frontiera dell'intersezione fra A e B, $\delta(A \cap B)$; e l'insieme interno dell'unione fra A e B, $\overset{\circ}{\overline{(A \cup B)}}$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\, x} - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{4+x}\right)^{4+x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{x}{1+4x^2}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta tre punti di flesso)
6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\displaystyle\int_0^{4k} x^2\, dx = \int_0^k x\, dx$.
7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & h & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?
8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = y + arctg(3x + y)$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

5 febbraio 2024

Compito $\mathbb{F}4^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-e, 3]$ e $\mathcal{I}_2 = [-4, 0]$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_3$ tale per cui $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 = [-2e, 3]$ e $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 =]-2e, 2[$. Dopo aver determinato l'intervallo $\mathcal{I}_3$, calcolare l'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X).
2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^{1-5x}$, sia inoltre $f(g(x)) = 3x + 5$. Determinare le espressioni delle funzioni: $g(x)$ e $g(f(x))$.
3) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq 4^{2x} \leq 64\}$. Determinare l'insieme derivato dell'intersezione fra A e B, $\mathcal{D}(A \cap B)$; e l'insieme interno dell'unione fra A e B, $\overline{\overset{\circ}{(A \cup B)}}$. Gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi?
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{8+x}\right)^{8+x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta tre punti di flesso)
6) (8 punti) Determinare il valore del parametro positivo k per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza: $\displaystyle\int_0^k x^2\,dx = \int_0^{3k} x\,dx$.
7) (6 punti) Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} h & 0 & -1 \\ -3 & 0 & k \\ h & k & -1 \end{bmatrix}$, il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$. Per quali valori dei parametri h e k risulta verificata l'uguaglianza $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$?
8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie di equazione $z = 3y + tg(x-2y)$ nel punto di coordinate $P(0,0)$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.