Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

3 giugno 2024

Compito $\mathbb{G}5$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ sotto l'ipotesi che almeno due fra le tre proposizioni siano vere.

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i quattro casi in cui almeno due fra le tre proposizioni sono vere.

p	q	r	$\neg r$	$\neg p$	$p \Rightarrow \neg r$	$\neg p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
V	V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V

.

2) (8 punti) Data la funzione $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x+1}$, sapendo che $f(g(x)) = x - 1$, determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e determinare poi l'espressione della funzione $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x+1}$ si ottiene $f(g(x)) = 1 - \dfrac{1}{2g(x)+1}$; posto $1 - \dfrac{1}{2g(x)+1} = x - 1$ abbiamo $\dfrac{1}{2g(x)+1} = 2 - x$ ovvero $2g(x) + 1 = \dfrac{1}{2-x}$ ed in conclusione $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2-x} - 1\right) = \dfrac{x-1}{2(2-x)}$.

$$g(f(x)) = g\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) - 1}{2\left(2 - \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)\right)} = -\frac{1}{4(x+1)}.$$

3) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k per il quale risulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^{kx}} = 2.$$

3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^{kx}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{kx} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2}{\frac{e^{kx}-1}{kx} \cdot k} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1) \cdot k} = \frac{2}{k}$; posto $\dfrac{2}{k} = 2$, si ottiene facilmente $k = 1$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,3x}{1 - cos\,2x}$; $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1+3x}\right)^{3x}$.

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,3x}{1 - cos\,2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - cos\,3x}{9x^2} \cdot 9}{\frac{1 - cos\,2x}{4x^2} \cdot 4} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 9}{\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 4} = \frac{9}{4}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,3x}{1 - cos\,2x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,3x}{1 - cos\,2x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{sen\,3x \cdot 3}{sen\,2x \cdot 2} = \frac{(\to 0) \cdot 3}{(\to 0) \cdot 2}$ FI. Applichiamo nuovamente il Teorema: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen\,3x \cdot 3}{sen\,2x \cdot 2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{cos\,3x \cdot 9}{cos\,2x \cdot 4} \frac{(\to 1) \cdot 9}{(\to 1) \cdot 4} = \frac{9}{4}$.

La soluzione del limite può essere ottenuta anche con l'utilizzo del polinomio di MacLaurin; ricordiamo che $cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, quindi $1 - cos\,3x = \frac{9}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$ e $1 - cos\,2x = 2x^2 + o\left(x^2\right)$, sostituendo le espressioni prima ottenute nel limite abbiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,3x}{1 - cos\,2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{9}{2} + o(1)}{2 + o(1)} = \frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1+3x}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1+3x}\right)^{1+3x} \cdot \left(1 + \frac{2}{1+3x}\right)^{-1} = (\to e^2) \cdot (\to 1) = e^2.$$

Il limite può essere risolto anche notando che per $x \to +\infty$, $1 + 3x \asymp 3x$; quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1+3x}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{3x} = e^2.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = 2e^x + e^{-x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = 2e^{-x} + e^{-(-x)} = 2e^{-x} + e^x$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $2e^x + e^{-x} > 0$, vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni esponenziali. $y(0) = 3$, unico punto di intersezione con gli assi in $(0, 3)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to -\infty} 2e^x + e^{-x} = 2e^{(\to -\infty)} + e^{-(\to -\infty)} = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x + e^{-x}}{x} = -\infty; \text{ in quanto per } x \to -\infty,\ x = o(e^{-x}).$$

Il limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x + e^{-x}}{x} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x + e^{-x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{1} = \frac{2e^{(\to -\infty)} - e^{-(\to -\infty)}}{1} = \frac{(\to 0) - (\to +\infty)}{1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2e^x + e^{-x} = 2e^{(\to +\infty)} + e^{-(\to +\infty)} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x + e^{-x}}{x} = +\infty; \text{ in quanto per } x \to +\infty,\ x = o(2e^x).$$

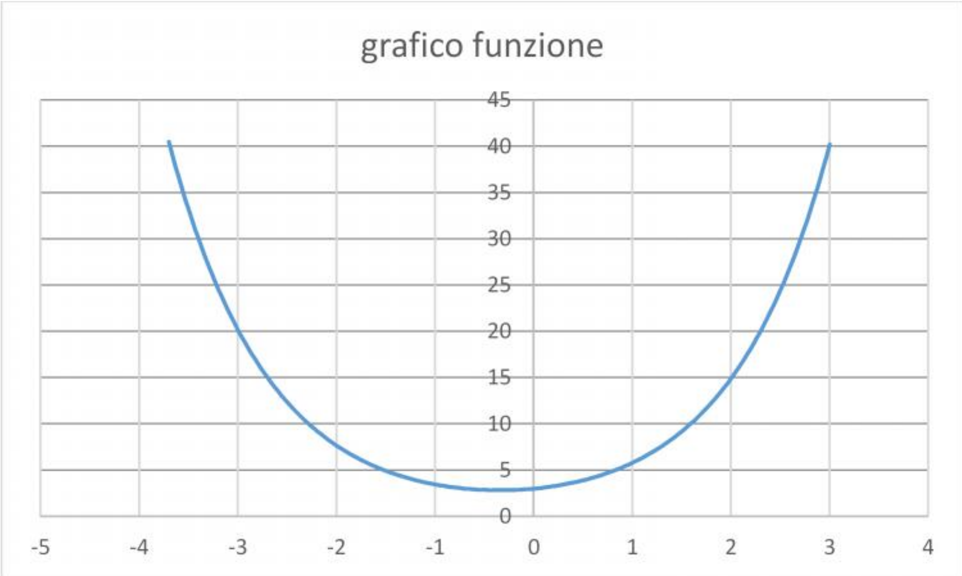
Il limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x + e^{-x}}{x} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x + e^{-x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{1} = \frac{2e^{(\to +\infty)} - e^{-(\to +\infty)}}{1} = \frac{(\to +\infty) - (\to 0)}{1} = +\infty.$$

La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2e^x - e^{-x}$. $y' > 0$ se $2e^x - e^{-x} > 0$ ovvero $2e^x > e^{-x}$ da cui $e^{2x} > \frac{1}{2}$ con soluzione $x > \frac{1}{2} \cdot log\left(\frac{1}{2}\right) = -log\sqrt{2}$. Funzione

strettamente decrescente in $]-\infty, -log\sqrt{2}]$, strettamente crescente in $[-log\sqrt{2}, +\infty[$. Punto di minimo assoluto in $m\left(-log\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.
Concavità e convessità: $y'' = 2e^{x} + e^{-x} = y$. $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (vedi punto sullo studio del segno). Funzione strettamente convessa.
Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^e \left(2x - \frac{1}{3x}\right) \mathrm{d}x$.

6) $\displaystyle\int_1^e \left(2x - \frac{1}{3x}\right) \mathrm{d}x \;=\; \left(x^2 - \frac{1}{3}\,log\,x\right)_1^e \;=\; \left(e^2 - \frac{1}{3}\,log\,e\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\,log\,1\right) \;=$
$\displaystyle e^2 - \frac{1}{3} - 1 \;=\; e^2 - \frac{4}{3}$.

7) (6 punti) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, determinare il valore dei parametri m e k per i quali risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-3 \\ 5-m \\ 2k \end{pmatrix}$. Posto $\begin{pmatrix} k-3 \\ 5-m \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
si ottiene facilmente $k = 2$ e $m = 1$.

8) (8 punti) Determinare il vettore gradiente della funzione $f(x,y) = e^{x^3-y} + 2 \cdot log\left(x^2 + 4y\right)$ nel punto $(0,1)$.

8) $\displaystyle\nabla f \;=\; \left(e^{x^3-y} \cdot 3x^2 + 2 \cdot \frac{2x}{x^2+4y}, e^{x^3-y} \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{4}{x^2+4y}\right) \;=$

$$\left(3x^2 e^{x^3-y} + \frac{4x}{x^2+4y}, -e^{x^3-y} + \frac{8}{x^2+4y}\right);$$

$$\nabla f(0,1) = \left(0 \cdot e^{-1} + 0, -e^{-1} + \frac{8}{4}\right) \;=\; \left(0, 2 - \frac{1}{e}\right).$$

Compito $\mathbb{G}6$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ sotto l'ipotesi che almeno due fra le tre proposizioni siano false.

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i quattro casi in cui almeno due fra le tre proposizioni sono false.

p	q	r	$\neg r$	$\neg p$	$p \Rightarrow \neg r$	$\neg p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
F	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V

.

2) (8 punti) Data la funzione $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$, sapendo che $f(g(x)) = x+1$, determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e determinare poi l'espressione della funzione $g(f(x))$.

2) Da $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ si ottiene $f(g(x)) = 2 - \dfrac{1}{g(x)+1}$; posto $2 - \dfrac{1}{g(x)+1} = x+1$ abbiamo $\dfrac{1}{g(x)+1} = 1-x$ ovvero $g(x)+1 = \dfrac{1}{1-x}$ ed in conclusione $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$.

$$g(f(x)) = g\left(2 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2-\frac{1}{x+1}}{1-\left(2-\frac{1}{x+1}\right)} = -\frac{2x+1}{x}.$$

3) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k per il quale risulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{kx}}{1-e^{2x}} = 4.$$

3) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{kx}}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{kx}-1}{kx}\cdot k}{\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2} = \frac{(\to 1)\cdot k}{(\to 1)\cdot 2} = \frac{k}{2}$; posto $\dfrac{k}{2} = 4$, si ottiene facilmente $k = 8$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+3x^2)}$; $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)^{1+2x}$.

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{log(1+2x^2)}{2x^2}\cdot 2}{\frac{log(1+3x^2)}{3x^2}\cdot 3} = \frac{(\to 1)\cdot 2}{(\to 1)\cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+3x^2)} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x\to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+3x^2)} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+2x^2}\cdot \cancel{4x}^{2}}{\frac{1}{1+3x^2}\cdot \cancel{6x}^{3}} = \frac{(\to 1)\cdot 2}{(\to 1)\cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

La soluzione del limite può essere ottenuta anche con l'utilizzo del polinomio di MacLaurin; ricordiamo che $log(1+x) = x + o(x)$, quindi $log(1+2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$ e $log(1+3x^2) = 3x^2 + o(x^2)$, sostituendo le espressioni prima ottenute nel limite abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{log(1+2x^2)}{log(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o(x^2)}{3x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2+o(1)}{3+o(1)} = \frac{2}{3}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{1+2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{2x} =$$
$(\to 1) \cdot (\to e^3) = e^3$.

Il limite può essere risolto anche notando che per $x \to +\infty$, $2x \asymp 1 + 2x$; quindi
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{1+2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{2x} = e^3.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^x + 2e^{-x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{-x} + 2e^{-(-x)} = e^{-x} + 2e^x$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $e^x + 2e^{-x} > 0$, vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni esponenziali. $y(0) = 3$, unico punto di intersezione con gli assi in $(0, 3)$.

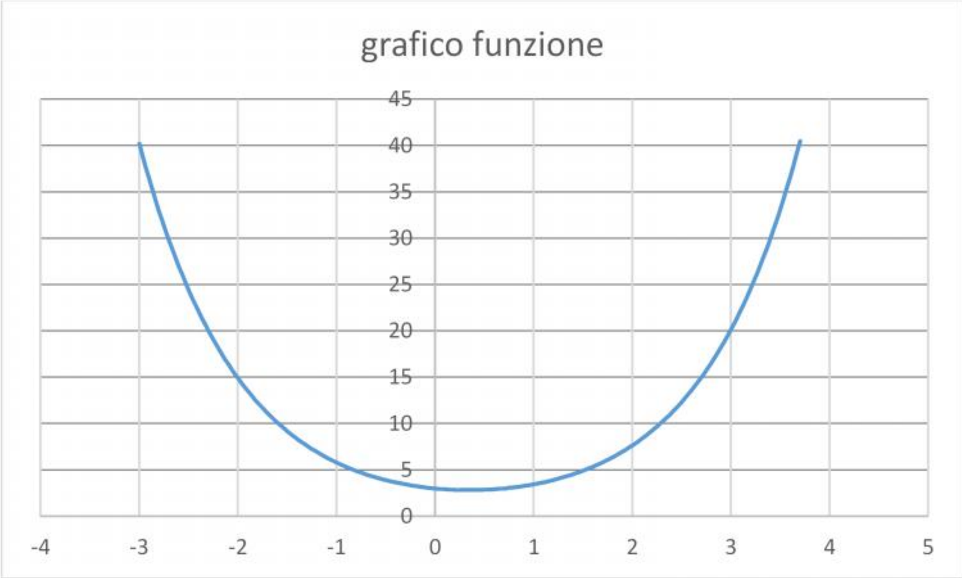
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$$\lim_{x \to -\infty} e^x + 2e^{-x} = e^{(\to -\infty)} + 2e^{-(\to -\infty)} = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty.$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{x} = -\infty;$$ in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(2e^{-x})$. Il limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{x} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2e^{-x}}{1} = \frac{e^{(\to -\infty)} - 2e^{-(\to -\infty)}}{1} = \frac{(\to 0) - (\to +\infty)}{1} = -\infty.$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x + 2e^{-x} = e^{(\to +\infty)} + 2e^{-(\to +\infty)} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty.$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{x} = +\infty;$$ in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^x)$.

Il limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{x} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2e^{-x}}{1} = \frac{e^{(\to +\infty)} - 2e^{-(\to +\infty)}}{1} = \frac{(\to +\infty) - (\to 0)}{1} = +\infty.$$ La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^x - 2e^{-x}$. $y' > 0$ se $e^x - 2e^{-x} > 0$ ovvero $e^x > 2e^{-x}$ da cui $e^{2x} > 2$ con soluzione $x > \frac{1}{2} \cdot log\, 2 = log\sqrt{2}$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, log\sqrt{2}]$, strettamente crescente in $[log\sqrt{2}, +\infty[$. Punto di minimo assoluto in $m\left(log\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Concavità e convessità: $y'' = e^x + 2e^{-x} = y$. $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (vedi punto sullo studio del segno). Funzione strettamente convessa.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{2x}+5x\right)\,\mathrm{d}x$.

6)

$$\int_1^e \left(\frac{1}{2x}+5x\right)\,\mathrm{d}x \;=\; \left(\frac{1}{2}\,log\,x+\frac{5}{2}\,x^2\right)_1^e \;=\; \left(\frac{1}{2}\,log\,e+\frac{5}{2}\,e^2\right)-\left(\frac{1}{2}\,log\,1+\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\,e^2-\frac{5}{2}\;=\;\frac{5}{2}\,e^2-2\,.$$

7) (6 punti) Data la matrice $\mathbb{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & -1\\ 3 & m & 1\\ 1 & 1 & k\end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}$ e $\mathbb{Y}=\begin{pmatrix}-1\\9\\7\end{pmatrix}$, determinare il valore dei parametri m e k per i quali risulta $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{Y}$.

7) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{bmatrix} k & 1 & -1\\ 3 & m & 1\\ 1 & 1 & k\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix}-k\\1+4m\\3+4k\end{pmatrix}$. Posto $\begin{pmatrix}-k\\1+4m\\3+4k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\9\\7\end{pmatrix}$ si ottiene facilmente $k=1$ e $m=2$.

8) (8 punti) Determinare il vettore gradiente della funzione $f(x,y)=e^{x^2+4y}+3\cdot log\left(x^3-y\right)$ nel punto $(1,0)$.

8) $$\nabla f\;=\;\left(e^{x^2+4y}\cdot 2x+3\cdot\frac{3x^2}{x^3-y},\,e^{x^2+4y}\cdot 4+3\cdot\frac{-1}{x^3-y}\right)\;=$$

$$\left(2xe^{x^2+4y}+\frac{9x^2}{x^3-y},\,4e^{x^2+4y}-\frac{3}{x^3-y}\right);$$

$$\nabla f(1,0)\;=\;(2\cdot e+9,4\cdot e-3)\;=\;(2e+9,4e-3)\,.$$