

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

3 giugno 2024

Compito G5✓

1) (6 punti) Siano p , q e r tre proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ sotto l'ipotesi che almeno due fra le tre proposizioni siano vere.

2) (8 punti) Data la funzione $f(x) = 1 - \frac{1}{2x+1}$, sapendo che $f(g(x)) = x - 1$, determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e determinare poi l'espressione della funzione $g(f(x))$.

3) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k per il quale risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^{kx}} = 2.$$

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1+3x}\right)^{3x}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = 2e^x + e^{-x}$.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^e \left(2x - \frac{1}{3x}\right) dx$.

7) (6 punti) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ determinare il valore dei parametri } m \text{ e } k \text{ per i quali risulta}$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}.$$

8) (8 punti) Determinare il vettore gradiente della funzione

$$f(x, y) = e^{x^3-y} + 2 \cdot \log(x^2 + 4y) \text{ nel punto } (0, 1).$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

3 giugno 2024

Compito G6✓

1) (6 punti) Siano p , q e r tre proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ sotto l'ipotesi che almeno due fra le tre proposizioni siano false.

2) (8 punti) Data la funzione $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$, sapendo che $f(g(x)) = x + 1$, determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e determinare poi l'espressione della funzione $g(f(x))$.

3) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k per il quale risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{kx}}{1 - e^{2x}} = 4.$$

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x^2)}{\log(1 + 3x^2)}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{1+2x}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^x + 2e^{-x}$.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^e \left(\frac{1}{2x} + 5x\right) dx$.

7) (6 punti) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ determinare il valore dei parametri } m \text{ e } k \text{ per i quali risulta}$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}.$$

8) (8 punti) Determinare il vettore gradiente della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2+4y} + 3 \cdot \log(x^3 - y) \text{ nel punto } (1, 0).$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.