Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

26 agosto 2024

Compito $\mathbb{G}7$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\neg(p \Rightarrow q)\ o\ r) \Leftrightarrow \neg r$.

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione proposta.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg(p \Rightarrow q)\ o\ r$	$\neg r$	$(\neg(p \Rightarrow q)\ o\ r) \Leftrightarrow \neg r$
V	V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F

.

2) (8 punti) Siano dati gli intervalli I_1, I_2 e I_3, tutti e tre illimitati, Determinare i tre intervalli sapendo che $I_1 \cap I_2 = [0,2[$ e $I_2 \cap I_3 = [0,1[$. Dopo aver determinato i tre intervalli calcolare l'insieme $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ ed il suo insieme frontiera $\delta(I_1 \cap I_2 \cap I_3)$. L'insieme $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ è un insieme aperto, chiuso o né aperto, né chiuso?

2) Da $I_1 \cap I_2 = [0,2[$ e $I_2 \cap I_3 = [0,1[$ si ottiene che necessariamente $I_2 = [0, +\infty[$ e di conseguenza $I_1 =]-\infty, 2[$ e $I_3 =]-\infty, 1[$. Per quanto riguarda l'intersezione $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ notiamo che $(I_2 \cap I_3) \subset I_1$, quindi $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_2 \cap I_3 = [0,1[$; insieme né aperto, né chiuso, con insieme frontiera: $\delta(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \{0,1\}$.

3) (6 punti) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, kx}{sen\, 4x} = 2$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, kx}{sen\, 4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{sen\, kx}{kx} \cdot k}{\frac{sen\, 4x}{4x} \cdot 4} = \dfrac{(\to 1) \cdot k}{(\to 1) \cdot 4} = \dfrac{k}{4}$. Posto $\dfrac{k}{4} = 2$, facilmente si ottiene $k = 8$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2+x}{1+x^2}\right)^{3+x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{3^x - 1}{x}}{\frac{2^x - 1}{x}} = \dfrac{(\to log\, 3)}{(\to log\, 2)} = \dfrac{log\, 3}{log\, 2} = log_2 3$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}\ FI$. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{3^x \cdot log\, 3}{2^x \cdot log\, 2} = \frac{(\to 1) \cdot log\, 3}{(\to 1) \cdot log\, 2} = \frac{log\, 3}{log\, 2} = log_2 3.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+x}{1+x^2}\right)^{3+x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{2}{x} + 1}{\frac{1}{x} + x}\right)^{3+x} = \left(\frac{(\to 1)}{(\to +\infty)}\right)^{(\to +\infty)} = (\to 0)^{(\to +\infty)} = 0.$$

Il limite può essere risolto anche notando che per $x \to +\infty$, $2 + x = o(1 + x^2)$; quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2+x}{1+x^2}\right)^{3+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{o(1+x^2)}{1+x^2}\right)^{3+x} = (\to 0)^{(\to +\infty)} = 0$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$y = x - \dfrac{1}{x^2}$.

5) $C.E.$: $x \neq 0$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = -x - \dfrac{1}{(-x)^2} = -x - \dfrac{1}{x^2} = -\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x - \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \dfrac{x^3 - 1}{x^2} > 0 \Rightarrow$ $x^3 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$; funzione positiva in $]1, +\infty]$, negativa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 1[$, punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - \dfrac{1}{x^2} = (\to -\infty) - (\to 0) = -\infty.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{1}{x^3} = 1 - (\to 0) = 1;$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y - x = \lim\limits_{x \to -\infty} x - \dfrac{1}{x^2} - x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0.$ $AsObl$ di equazione $y = x$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} x - \dfrac{1}{x^2} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty.$ AsV di equazione $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x - \dfrac{1}{x^2} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty.$ (Vedi sopra)

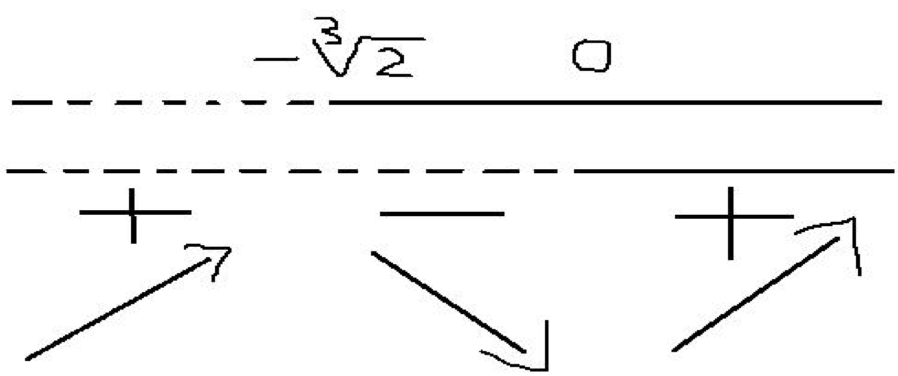
$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{1}{x^2} = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x^3} = 1 - (\to 0) = 1;$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{1}{x^2} - x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0.$ (Vedi sopra)

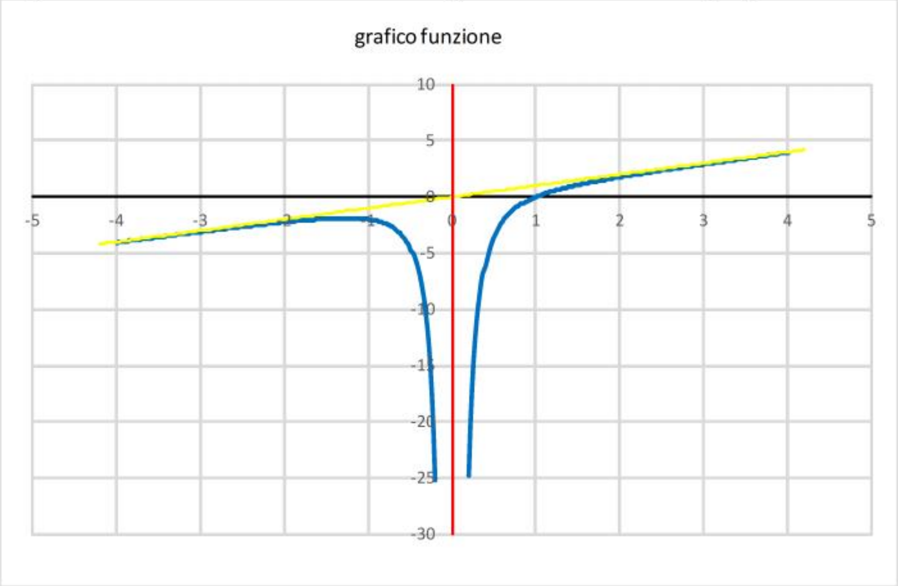
Crescenza e decrescenza: $y' = 1 + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x^3 + 2}{x^3}$. $y' > 0$ se $\dfrac{x^3 + 2}{x^3} > 0$, studiamo separatamente numeratore e denominatore: $x^3 + 2 > 0$ se $x^3 > -2$, da cui $x > -\sqrt[3]{2}$; $x^3 > 0$ se $x > 0$. Come si evince dal grafico dei segni seguente, la funzione è strettamente crescente in $]-\infty, -\sqrt[3]{2}]$ e in $]0, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-\sqrt[3]{2}, 0[$, e presenta massimo relativo per $x = -\sqrt[3]{2}$, con

$y\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -\sqrt[3]{2} - \dfrac{1}{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^2} = -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.



Concavità e convessità: $y'' = -\dfrac{6}{x^4}$. $y'' < 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente concava. Nessun punto di flesso.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale e in giallo l'asintoto obliquo):



.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \left(e^{2x} - e^x\right) \mathrm{d}x$.

6) $\displaystyle\int_0^2 \left(e^{2x} - e^x\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x\right)_0^2 = \left(\frac{e^4}{2} - e^2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) =$
$\displaystyle\frac{e^4}{2} - e^2 + \frac{1}{2} = \frac{e^4 - 2e^2 + 1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)^2$.

7) (6 punti) Date le funzioni $f(x) = e^x + 1$ e $g(x) = 2x - k\, sen\, x$, determinare il valore del parametro k in modo che le due funzioni abbiano, nel punto $x = 0$, rette tangenti al loro grafico tra loro perpendicolari.

7) Ricordiamo che due rette sono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1, ed il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione nel punto x_0 è la derivata della funzione nel punto; nel caso specifico le rette tangenti al grafico delle due funzioni sono perpendicolari se $f'(0) \cdot g'(0) = -1$, con $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 2 - k\, cos\, x$, $f'(0) = 1$ e $g'(0) = 2 - k$. Posto $1 \cdot (2 - k) = -1$ si ottiene $k = 3$.

8) (8 punti) Data la funzione $f(x, y) = x^2 - xy + 4y^2$, determinare la natura del suo unico punto stazionario.

8) $\nabla f = (2x - y, -x + 8y)$.

FOC: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 15x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; unico punto staionario $O(0,0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 15 > 0$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = 15 > 0$, $f''_{xx}(O) = 2 > 0$. O punto di minimo.