Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

10 settembre 2024

Compito $\mathbb{S}1$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici. Si verifichi se la proposizione $\neg(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ risulti o meno una tautologia.

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione proposta.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V

Come si evince dall'ultima colonna della tavola, la proposizione proposta è una tautologia.

2) (8 punti) Siano date le funzioni $f(x) = e^{2x} - 1$, $g(x) = 2x + 1$ e $h(x)$, sapendo che $f(g(h(x))) = x$, determinare le espressioni della funzione $h(x)$ e della funzione $h(g(f(x)))$.

2) Da $f(x) = e^{2x} - 1$ e $g(x) = 2x + 1$ si ottiene
$f(g(x)) = f(2x+1) = e^{2(2x+1)} - 1 = e^{4x+2} - 1$ e quindi
$f(g(h(x))) = e^{4h(x)+2} - 1$; posto $e^{4h(x)+2} - 1 = x$ abbiamo $e^{4h(x)+2} = 1 + x$
ovvero $4h(x) = log(1+x) - 2$ ed in conclusione

$$h(x) = \frac{log(1+x) - 2}{4} = log\sqrt[4]{1+x} - \frac{1}{2}.$$

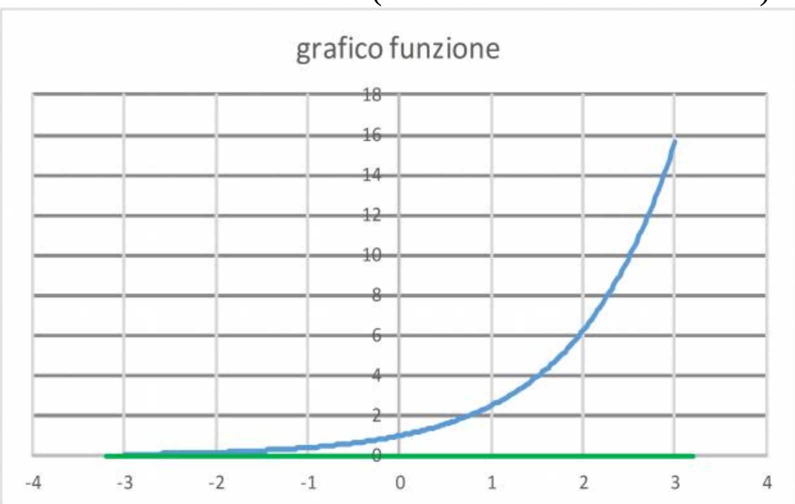
$$h(g(f(x))) = h\big(g\big(e^{2x} - 1\big)\big) = h\big(2e^{2x} - 1\big) = log\sqrt[4]{2e^{2x}} - \frac{1}{2} =$$
$$\frac{1}{2}x + log\sqrt[4]{2} - \frac{1}{2}.$$

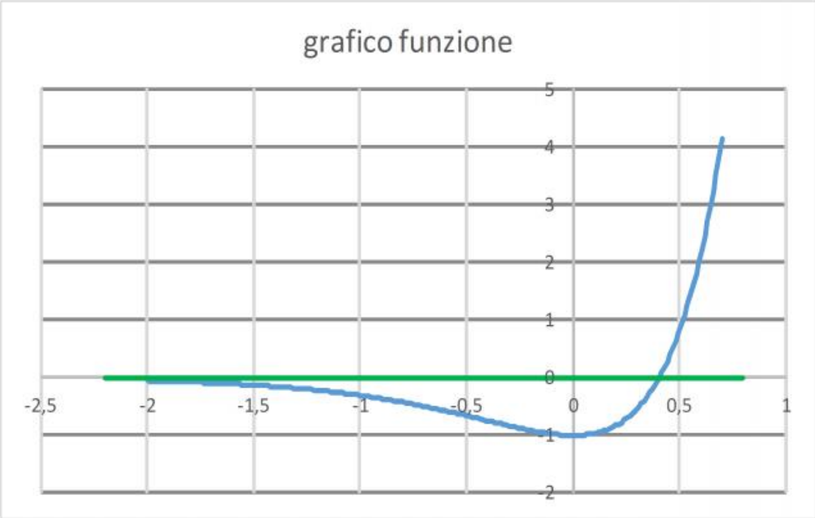
3) (6 punti) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfa entrambe le seguenti definizioni di limite:

$i)$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : x > \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;

$ii)$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : x < -\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

3) La prima definizione di limite proposta equivale a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, mentre la seconda equivale a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Di seguito due possibili grafici di funzione che soddisfano entrambe le definizioni (in verde l'asintoto orizzontale).





4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{sen\,3x}$;
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+5x^2}{3+2x+2x^2}\right)^{3x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{sen\,3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1+2x)}{2x} \cdot 2}{\frac{sen\,3x}{3x} \cdot 3} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1) \cdot 3} = \frac{2}{3}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{sen\,3x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{sen\,3x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+2x} \cdot 2}{cos\,3x \cdot 3} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1) \cdot 3} = \frac{2}{3}$.

La soluzione del limite può essere ottenuta anche con l'utilizzo del polinomio di MacLaurin; ricordiamo che $log(1+x) = x + o(x)$, quindi
$log(1+2x) = 2x + o(x)$ e $sen\,x = x + o(x)$ da cui $sen\,3x = 3x + o(x)$, sostituendo le espressioni prima ottenute nel limite abbiamo:
$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{sen\,3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x+o(x)}{3x+o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2+o(1)}{3+o(1)} = \frac{2}{3}$.

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+5x^2}{3+2x+2x^2}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^2}+5}{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}+2}\right)^{3x} =$
$\left(\frac{(\to 5)}{(\to 2)}\right)^{(\to +\infty)} = \left(\to \frac{5}{2}\right)^{(\to +\infty)} = +\infty.$

Il limite può essere risolto anche notando che per $x \to +\infty$, $1+5x^2 \asymp 5x^2$ e $3+2x+2x^2 \asymp 2x^2$; quindi $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+5x^2}{3+2x+2x^2}\right)^{3x} =$
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2}{2x^2}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{125}{8}\right)^{x} = +\infty.$

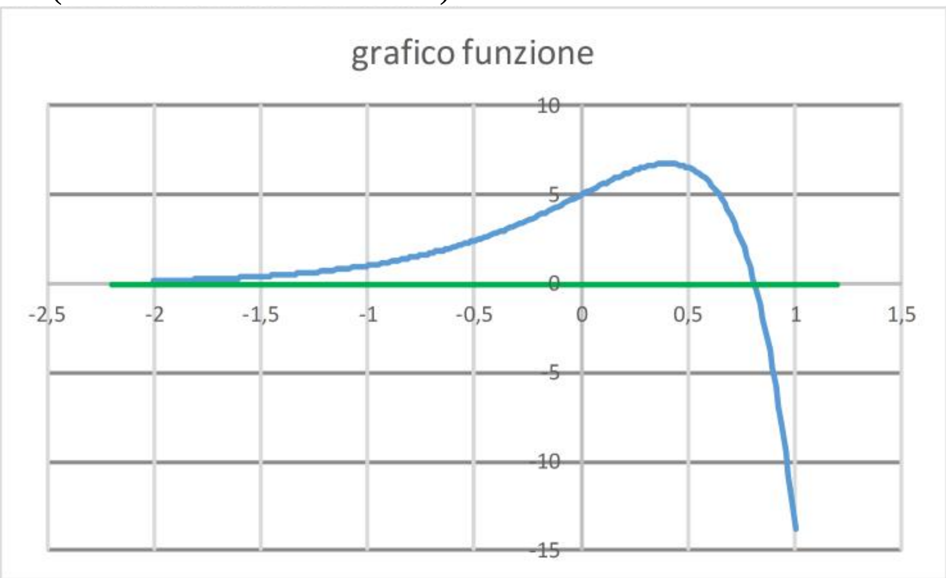
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = 9e^{2x} - 4e^{3x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = 9e^{2(-x)} - 4e^{3(-x)} = 9e^{-2x} - 4e^{-3x}$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $9e^{2x} - 4e^{3x} > 0 \Rightarrow 9e^{2x} > 4e^{3x} \Rightarrow$

$e^x < 9/4 \Rightarrow x < log(9/4) = 2\,log(3/2)$; funzione positiva in $]-\infty, 2\,log(3/2)]$, negativa in $[2\,log(3/2), +\infty[$, punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A(2\,log(3/2), 0)$. $y(0) = 9e^0 - 4e^0 = 5$, punto di intersezione con l'asse delle ordinate in $B(0, 5)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -\infty} 9e^{2x} - 4e^{3x} = 9e^{(\to -\infty)} - 4e^{(\to -\infty)} = (\to 0) - (\to 0) = 0$. $AsOrSx$ di equazione $y = 0$.
$\lim_{x \to +\infty} 9e^{2x} - 4e^{3x} = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(9 - 4e^x) = e^{(\to +\infty)}\left(9 - 4e^{(\to +\infty)}\right) = (\to +\infty) \cdot (\to -\infty) = -\infty.$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9e^{2x} - 4e^{3x}}{x} = -\infty$; in quanto per $x \to +\infty$, x è infinito di ordine inferiore sia di $9e^{2x}$, sia di $4e^{3x}$.
Il limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{9e^{2x} - 4e^{3x}}{x} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{9e^{2x} - 4e^{3x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{18e^{2x} - 12e^{3x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} 6e^{2x}(3 - 2e^x) = 6e^{(\to +\infty)}\left(3 - 2e^{(\to +\infty)}\right) = (\to +\infty) \cdot (\to -\infty) = -\infty$. La funzione a destra non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = 18e^{2x} - 12e^{3x} = 6e^{2x}(3 - 2e^x)$. $y' > 0$ se $3 - 2e^x > 0$ ovvero $e^x < 3/2$ da cui $x < log(3/2)$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, log(3/2)]$, strettamente decrescente in $[log(3/2), +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(log(3/2), 27/4)$.
Concavità e convessità: $y'' = 36e^{2x} - 36e^{3x} = 36e^{2x}(1 - e^x)$. $y'' > 0$ se $1 - e^x > 0$ ovvero $e^x < 1$ da cui $x < 0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0]$, strettamente concava in $[0, +\infty[$. Punto di flesso $B(0, 5)$.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^2 (x^2 + e^{2x})\,\mathrm{d}x$.

6) $\int_0^2 (x^2 + e^{2x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{e^{2x}}{2}\right)_0^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{e^4}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) =$

$$\frac{8}{3}+\frac{e^4}{2}-\frac{1}{2} = \frac{13}{6}+\frac{e^4}{2} = \frac{13+3e^4}{6}.$$

7) (6 punti) Date le funzioni $f(x)=e^{kx}+1$ e $g(x)=x^2-x+3$, determinare il valore del parametro k in modo che le due funzioni abbiano, nel punto $x=0$, rette tangenti al loro grafico tra loro parallele.

7) Ricordiamo che due rette sono parallele se presentano lo stesso coefficiente angolare, ed il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione nel punto x_0 è la derivata della funzione nel punto; nel caso specifico le rette tangenti al grafico delle due funzioni sono parallele se $f'(0)=g'(0)$, con $f'(x)=e^{kx}\cdot k$, $g'(x)=2x-1$, $f'(0)=k$ e $g'(0)=-1$. Posto $f'(0)=g'(0)$ si ottiene facilmente $k=-1$.

8) (8 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione $f(x,y)=3e^x-2e^y-3x+2y$.

8) $\nabla f=(3e^x-3,\,-2e^y+2)$.

FOC: $\begin{cases}3e^x-3=0\\ -2e^y+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3e^x=3\\ 2e^y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$; unico punto critico $O(0,0)$.

$\mathcal{H}f=\begin{bmatrix}3e^x & 0\\ 0 & -2e^y\end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f|=-6\,e^xe^y<0$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)|=-6<0$. O punto di sella.