

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

6 novembre 2023

Compito A1 - Riccarelli

- 1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il

risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3+5x}{6}$.

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3+5x}{6} = -\frac{7}{6}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left| \frac{3+5x}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right) \right| =$
 $\left| \frac{5x+10}{6} \right| = \frac{5}{6}|x+2|$; posto $\frac{5}{6}|x+2| < \epsilon$ abbiamo $|x+2| < \frac{6}{5}\epsilon$, limite

verificato con $\delta_\epsilon = \frac{6}{5}\epsilon$.

- 2) Siano dati gli insiemi $A = [-2, 8]$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\}$. Determinare l'insieme $A \cap B$ ed il suo insieme derivato $D(A \cap B)$. L'insieme $A \cap B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$B = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\} =]1, +\infty[$; $A \cap B = [-2, 8] \cap]1, +\infty[=]1, 8]$ insieme né aperto né chiuso, $D(A \cap B) = [1, 8]$.

- 3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = x - 2$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$f(g(h(x))) = f(g(x-2)) = f(2^{x-2} + 1) = \frac{(2^{x-2} + 1) + 1}{(2^{x-2} + 1) - 1} = \frac{2^{x-2} + 2}{2^{x-2}} =$

$1 + 2^{3-x}$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo $y = 1 + 2^{3-x}$ da cui $2^{3-x} = y - 1$ e conseguentemente $3 - x = \log_2(y - 1)$ con $x = 3 - \log_2(y - 1)$; espressione dell'inversa: $y = 3 - \log_2(x - 1)$.

- 4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \circ p)$.

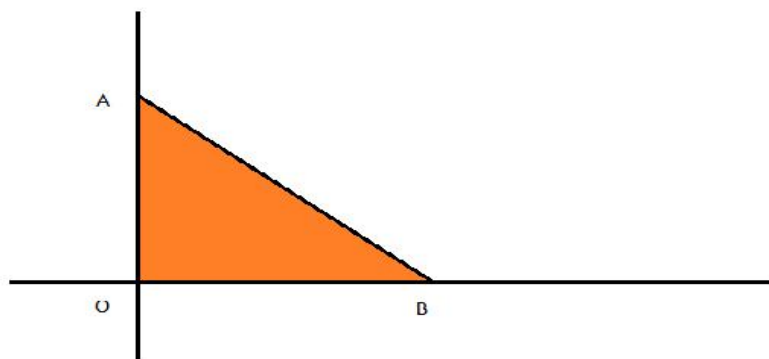
p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \circ p$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \circ p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

- 5) Date le funzioni $f(x) = 3^{2x+1} + k$ e $g(x) = \log(x - 2)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^{2x+1} + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + k \end{cases}$;

A(0, 3 + k). Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$\begin{cases} y = \log(x - 2) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x - 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$; B(3, 0).



Il triangolo AOB è rappresentato in figura con base $\overline{OB} = 3$, altezza $\overline{OA} = 3 + k$ e area $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3 + k) = \frac{3}{2}(3 + k)$; posto $\frac{3}{2}(3 + k) = 5$, si ottiene facilmente $k = \frac{1}{3}$.

Compito **A2**- Riccarelli

- 1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il

risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 12}{5}$.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 12}{5} = -\frac{3}{5}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left| \frac{3x - 12}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) \right| = \left| \frac{3x - 9}{5} \right| = \frac{3}{5}|x - 3|$; posto $\frac{3}{5}|x - 3| < \epsilon$ abbiamo $|x - 3| < \frac{5}{3}\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{5}{3}\epsilon$.

- 2) Siano dati gli insiemi $A = [3, 10[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 8\}$. Determinare l'insieme $A \cup B$ ed il suo insieme interno $(A \cup B)^\circ$. L'insieme $A \cup B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 8\} =]-\infty, 8]$; $A \cup B = [3, 10[\cup]-\infty, 8] =]-\infty, 10[$ insieme aperto, $(A \cup B)^\circ = A \cup B$ in quanto insieme aperto.

- 3) Date le funzioni $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ e $h(x) = 2x + 1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$f(g(h(x))) = f(g(2x + 1)) = f\left(\frac{(2x + 1) - 1}{(2x + 1) + 2}\right) = f\left(\frac{2x}{2x + 3}\right) =$

$\log_2\left(\frac{2x}{2x + 3}\right)$. Per ottenere l'espressione della funzione inversa, poniamo

$y = \log_2\left(\frac{2x}{2x + 3}\right)$ da cui $\frac{2x}{2x + 3} = 2^y$ e conseguentemente $2x(1 - 2^y) = 3 \cdot 2^y$

con $x = \frac{3 \cdot 2^y}{2(1 - 2^y)}$; espressione dell'inversa: $y = \frac{3 \cdot 2^x}{2(1 - 2^x)}$.

- 4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \circ q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$.

p	q	$p \circ q$	$q \Rightarrow p$	$(p \circ q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

- 5) Date le funzioni $f(x) = 2^{2-x} + 1$ e $g(x) = \log(x - k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2^{2-x} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$;

A(0, 5). Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} y = \log(x - k) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x - k) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - k = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k + 1 \\ y = 0 \end{cases};$$

B(k + 1, 0). Il triangolo AOB è rappresentato nella figura della pagina precedente con base $\overline{OB} = k + 1$, altezza $\overline{OA} = 5$ e area

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot 5 = \frac{5}{2}(k + 1); \text{ posto } \frac{5}{2}(k + 1) = 5, \text{ si ottiene facilmente } k = 1.$$

Compito **A3**- Riccarelli

- 1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il

risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x + 11}{8}$.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x + 11}{8} = \frac{29}{8}. \text{ Per la verifica del limite abbiamo } \left| \frac{3x + 11}{8} - \frac{29}{8} \right| = \left| \frac{3x - 18}{8} \right| = \frac{3}{8}|x - 6|; \text{ posto } \frac{3}{8}|x - 6| < \epsilon \text{ abbiamo } |x - 6| < \frac{8}{3}\epsilon, \text{ limite}$$

verificato con $\delta_\epsilon = \frac{8}{3}\epsilon$.

- 2) Siano dati gli insiemi $A =] - 3, 12[$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: - 5 \leq x \leq 8\}$. Determinare l'insieme $A \cup B$ ed il suo insieme frontiera $\delta(A \cup B)$. L'insieme $A \cup B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$B = \{x \in \mathbb{R}: - 5 \leq x \leq 8\} = [- 5, 8]$; $A \cup B =] - 3, 12[\cup [- 5, 8] = [- 5, 12[$ insieme né aperto né chiuso, $\delta(A \cup B) = \{- 5, 12\}$.

- 3) Date le funzioni $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \frac{2x}{x + 1}$ e $h(x) = 2^x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$$f(g(h(x))) = f(g(2^x)) = f\left(\frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1}\right) = f\left(\frac{2^{x+1}}{2^x + 1}\right) =$$

$$3 \cdot \frac{2^{x+1}}{2^x + 1} - 1 = \frac{5 \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}. \text{ Per ottenere l'espressione della funzione inversa,}$$

poniamo $y = \frac{5 \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ da cui $y(2^x + 1) = 5 \cdot 2^x - 1$ e conseguentemente

$$2^x = \frac{1 + y}{5 - y} \text{ con } x = \log_2\left(\frac{1 + y}{5 - y}\right); \text{ espressione dell'inversa: } y = \log_2\left(\frac{1 + x}{5 - x}\right).$$

- 4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \wedge p)$.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F

- 5) Date le funzioni $f(x) = k + 2^{1+2x}$ e $g(x) = \log(2x - 3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = k + 2^{1+2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k + 2 \end{cases}$;

A(0, $k + 2$). Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} y = \log(2x - 3) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(2x - 3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}; B(2, 0).$$

Il triangolo AOB è rappresentato nella figura della seconda pagina con base

$\overline{OB} = 2$, altezza $\overline{OA} = k + 2$ e area $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (k + 2) = k + 2$; posto $k + 2 = 5$, si ottiene facilmente $k = 3$.

Compito **A4**- Riccarelli

- 1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il

risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x + 12}{7}$.

$\lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x + 12}{7} = -\frac{11}{7}$. Per la verifica del limite abbiamo

$$\left| -\frac{x + 12}{7} - \left(-\frac{11}{7}\right) \right| = \left| -\frac{x + 1}{7} \right| = \frac{1}{7}|x + 1|; \text{posto } \frac{1}{7}|x + 1| < \epsilon$$

abbiamo $|x + 1| < 7\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = 7\epsilon$.

- 2) Siano dati gli insiemi $A =]0, +\infty[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -5 \vee x > 15\}$.

Determinare l'insieme $A \cap B$ ed il suo insieme chiusura $\overline{A \cap B}$. L'insieme $A \cap B$ è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -5 \vee x > 15\} =]-\infty, -5] \cup]15, +\infty[;$$

$$A \cap B = (] -\infty, -5] \cup]15, +\infty[) \cap]0, +\infty[=]15, +\infty[\text{ insieme aperto,}$$

$$\overline{A \cap B} =]15, +\infty[= [15, +\infty[.$$

- 3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x}{x - 2}$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = 3x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$$f(g(h(x))) = f(g(3x)) = f(\log(3x)) = \frac{\log(3x)}{\log(3x) - 2}. \text{ Per ottenere l'espressione}$$

della funzione inversa, poniamo $y = \frac{\log(3x)}{\log(3x) - 2}$ da cui $y(\log(3x) - 2) = \log(3x)$

e conseguentemente $\log(3x) = \frac{2y}{y - 1}$ con $x = \frac{1}{3}e^{\frac{2y}{y-1}}$; espressione dell'inversa:

$$y = \frac{1}{3}e^{\frac{2x}{x-1}}.$$

- 4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow q)$ e $(q \Leftrightarrow p)$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

- 5) Date le funzioni $f(x) = 3^{1-x}$ e $g(x) = \log(x - 2k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro reale positivo k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Il punto A si ottiene dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}; A(0, 3)$.

Il punto B si ottiene dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} y = \log(x - 2k) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x - 2k) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2k = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 0 \end{cases};$$

$B(2k + 1, 0)$. Il triangolo AOB è rappresentato nella figura della seconda pagina con base $\overline{OB} = 2k + 1$, altezza $\overline{OA} = 3$ e area

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot (2k + 1) \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot (2k + 1); \text{ posto } \frac{3}{2} \cdot (2k + 1) = 6, \text{ si}$$

ottiene facilmente $k = \frac{3}{2}$.