Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

10 ottobre 2024

Compito $\mathbb{O}1$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$. La proposizione proposta è una tautologia?

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione proposta.

p	q	r	$p \Leftrightarrow r$	$r \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Come si evince dall'ultima colonna della tavola, la proposizione proposta non è una tautologia.

2) (8 punti) Date le funzioni $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$, $g(x) = 2^x - 1$ e $h(x) = 3x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

2) $f(g(h(x))) = f(g(3x)) = f\left(2^{3x} - 1\right) = \dfrac{1 + 2^{3x} - 1}{2^{3x} - 1} = \dfrac{2^{3x}}{2^{3x} - 1} = \dfrac{8^x}{8^x - 1}$. Per determinare l'espressione dell'inversa, posto $y = \dfrac{8^x}{8^x - 1}$ risulta $y(8^x - 1) = 8^x$ da cui $8^x(y-1) = y$ con $8^x = \dfrac{y}{y-1}$ ed in conclusione $x = log_8\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$.

Espressione della funzione inversa: $y = log_8\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

3) (6 punti) Siano I_1 e I_2 due intervalli chiusi con insiemi frontiera rispettivamente $\delta(I_1) = \{1, 2e\}$ e $\delta(I_2) = \{2, 2\pi\}$. Determinare gli intervalli I_1 e I_2 e calcolare gli insiemi frontiera dell'unione fra I_1 e I_2, $\delta(I_1 \cup I_2)$, e della loro intersezione, $\delta(I_1 \cap I_2)$.

3) Se I_1 e I_2 sono due intervalli chiusi, da $\delta(I_1) = \{1, 2e\}$ si ottiene $I_1 = [1, 2e]$ e da $\delta(I_2) = \{2, 2\pi\}$ si ha $I_2 = [2, 2\pi]$. Segue $I_1 \cup I_2 = [1, 2\pi]$ con $\delta(I_1 \cup I_2) = \{1, 2\pi\}$ e $I_1 \cap I_2 = [2, 2e]$ con $\delta(I_1 \cap I_2) = \{2, 2e\}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1+2x)}{log(1+x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2+3x^2}{3+2x^2}\right)^x$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1+2x)}{log(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot \frac{log(1+2x)}{2x} \cdot}{\frac{log(1+x)}{x}} = \dfrac{2 \cdot (\to 1)}{(\to 1)} = 2$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1+2x)}{log(1+x)} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{log(1+x)} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+2x} \cdot 2}{\frac{1}{1+x}} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1)} = 2.$$

La soluzione del limite può essere ottenuta anche con l'utilizzo del polinomio di MacLaurin; ricordiamo che $log(1+x) = x + o(x)$, quindi $log(1+2x) = 2x + o(x)$, sostituendo le espressioni prima ottenute nel limite abbiamo: $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x)}{log(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + o(1)}{1 + o(1)} = 2$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+3x^2}{3+2x^2} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cancel{x}^2\left(\frac{2}{x^2}+3\right)}{\cancel{x}^2\left(\frac{3}{x^2}+2\right)} \right)^x =$$

$$\left(\frac{(\to 3)}{(\to 2)} \right)^{(\to +\infty)} = \left(\to \frac{3}{2} \right)^{(\to +\infty)} = +\infty.$$

Il limite può essere risolto anche notando che per $x \to +\infty$, $2+3x^2 \asymp 3x^2$ e $3+2x^2 \asymp 2x^2$; quindi $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+3x^2}{3+2x^2} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{2x^2} \right)^x =$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = +\infty.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = x \cdot log\, x$.

5) $C.E.$: $x > 0$, $C.E. =]0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x \cdot log\, x > 0 \Rightarrow log\, x > 0$ in quanto $x > 0$ nel $C.E.$; $log\, x > 0$ se $x > 1$; funzione negativa in $]0, 1[$, positiva in $]1, +\infty[$, punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0} x \cdot log\, x = \lim_{x \to 0} log\, x^x = log\,(\to 1) = 0$. Il punto $O(0,0)$ è punto di discontinuità di terza specie (eliminabile) per la funzione.

Il limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} x \cdot log\, x = \lim_{x \to 0} \frac{log\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{log\, x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot log\, x = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty.$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot log\, x}{x} = \lim_{x \to +\infty} log\, x = +\infty$. La funzione a destra non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 1 \cdot log\, x + x \cdot \frac{1}{x} = log\, x + 1$. $y' > 0$ se $log\, x + 1 > 0$ ovvero $log\, x > -1$ da cui $x > e^{-1}$. Funzione strettamente decrescente in $]0, e^{-1}]$, strettamente crescente in $[e^{-1}, +\infty[$. Punto di minimo assoluto in $m(e^{-1}, -e^{-1})$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{1}{x}$. $y'' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:

.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^1 \left(e^{2x} - e^{3x} + e^x\right) \mathrm{d}x$.

6) $\int_0^1 \left(e^{2x} - e^{3x} + e^x\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{3x}}{3} + e^x\right)_0^1 =$

$$\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{3} + e\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{3} + e - \frac{7}{6} = \frac{3e^2 - 2e^3 + 6e - 7}{6}\ .$$

7) (6 punti) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 \\ k & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

determinare il valore del parametro k affinchè il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ sia perpendicolare al vettore $(1, -1, 1)$.

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 \\ k & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2-2k \\ k-3 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, calcoliamo il prodotto scalare fra il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ e il vettore $(1, -1, 1)$:
$(k-1, 2-2k, k-3) \cdot (1, -1, 1) = k - 1 - (2 - 2k) + k - 3 = 4k - 6$. Posto $4k - 6 = 0$ si ottiene facilmente $k = \frac{3}{2}$.

8) (8 punti) Data la funzione $f(x, y) = x^2 y + y^2 + 2xy$, determinare la natura dei suoi punti critici.

8) $\nabla f = (2xy + 2y, x^2 + 2y + 2x)$.

$$FOC\!: \begin{cases} 2xy + 2y = 0 \\ x^2 + 2y + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(x+1) = 0 \\ x^2 + 2y + 2x = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \begin{cases} 2y = 0 \\ x^2 + 2y + 2x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 + 2y + 2x = 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x(x+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=-1 \\ 2y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=1/2 \end{cases}$$
; tre punti critici $O(0,0)$, $P(-2,0)$ e $Q(-1,1/2)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 4y-(2x+2)^2$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = -4 < 0$. O punto di sella;

$|\mathcal{H}f(P)| = -4 < 0$. P punto di sella;

$|\mathcal{H}f(Q)| = 2 > 0$, $f''_{yy}(Q) = 2 > 0$. Q punto di minimo.