UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Corsi di Laurea Triennale in Economia
A.A. 2024/25
Correzione Prova di verifica di fine Precorso Matematica 2024
I Versione

1) Si considerino gli insiemi A, B, C e D con:
$A = \{a, e, i, o, u\}$, insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano;
$B = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\}$, insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano;
$C = \{a, b, c, \ldots, j, k, \ldots, w, x, y, z\}$, insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese;
$D = (A \backslash B) \cup C$.
Risulta:
☐ 1a) $D = A$
☐ 1b) $D = B$
☐ 1c) $D = \emptyset$
☒ 1d) $D = C$
SOLUZIONE: l'insieme A è contenuto nell'insieme B, di conseguenza $A \backslash B = \emptyset$ e quindi $D = (A \backslash B) \cup C = \emptyset \cup C = C$. Risposta corretta 1d.

2) La disuguaglianza $log_2(x^2 - x - 1) > 0$ è verificata per:
☐ 2a) $-1 < x < 2$
☐ 2b) $x < -1$
☐ 2c) $x > 2$
☒ 2d) $x < -1 \ \vee \ x > 2$
SOLUZIONE: il logaritmo ha base maggiore di 1 e di conseguenza esso è positivo se e solo se il suo argomento è maggiore di 1; la disuguaglianza proposta è equivalente alla $x^2 - x - 1 > 1$ ovvero $x^2 - x - 2 > 0$. Disequazione di secondo grado, calcoliamo il suo discriminante: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0$; determiniamo le due radici associate:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ \searrow \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{array}$$

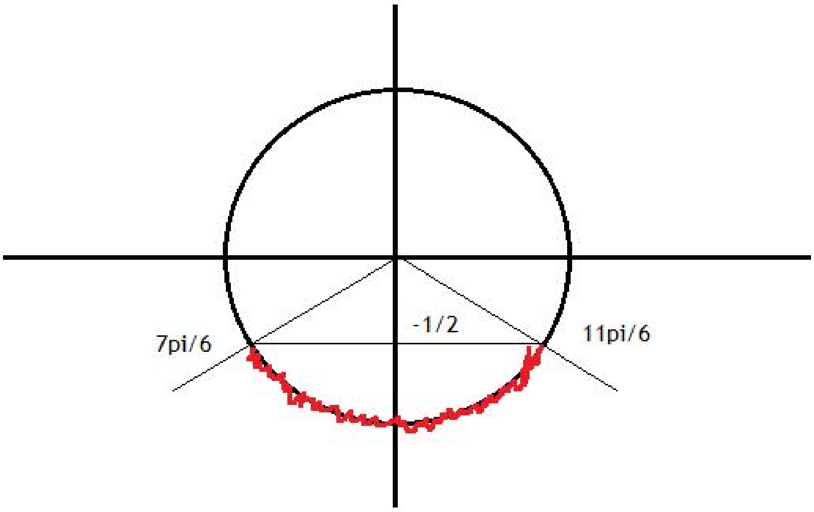
. La disequazione presenta soluzioni esterne alle radici, quindi S: $x < -1 \ \vee \ x > 2$. Risposta corretta 2d.

3) Siano x_1 e x_2 due numeri razionali. Quale fra le seguenti affermazioni è certamente vera?
☐ 3a) $x_1 + x_2$ può essere sia un numero razionale che un numero irrazionale
☐ 3b) $x_1 + x_2$ è un numero irrazionale
☒ 3c) $x_1 + x_2$ è un numero razionale
☐ 3d) $x_1 + x_2$ è certamente un numero naturale
SOLUZIONE: per la proprietà di densità dei numeri razionali, la somma di due numeri razionali è certamente un numero razionale, ma non si può affermare con certezza che tale somma sia un numero naturale. Risposta corretta 3c.

4) Data una circonferenza di raggio r, una corda $\overline{AB}$ tracciata in essa e dato α l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda, la lunghezza di $\overline{AB}$ è:
☐ 4a) $2r \cdot tg(\alpha)$

☐ 4b) $2r \cdot sen^2(\alpha)$
☐ 4c) $2r \cdot cos(\alpha)$
☒ 4d) $2r \cdot sen(\alpha)$
SOLUZIONE: per il Teorema della corda, la lunghezza di una corda $\overline{AB}$ che insiste su un angolo alla circonferenza di ampiezza α è pari al diametro della circonferenza per il seno dell'angolo α. Risposta corretta 4d.

5) $sen(x) \leq -\frac{1}{2}$ ha soluzione:
☒ 5a) $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$
☐ 5b) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$
☐ 5c) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$
☐ 5d) $\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$
SOLUZIONE: relativamente al primo giro sulla circonferenza goniometrica (vedi immagine seguente), la funzione $sen(x)$, che si misura sulle ordinate, è minore o uguale a $-\frac{1}{2}$ se e solo se $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$, aggiungendo la periodicità della funzione seno, pari a 2π, si ottiene la soluzione generale: $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$. Risposta corretta 5a.



6) Data l'equazione $log_x 5 = \frac{2}{3}$, si ha che:
☒ 6a) $x = 5\sqrt{5}$
☐ 6b) $x = 25$
☐ 6c) $x = \frac{2}{5}$

☐ 6d) $x = 5$

SOLUZIONE: per le proprietà dei logaritmi $log_x 5 = \frac{1}{log_5 x}$, pertanto l'equazione proposta può essere riscritta come: $log_5 x = \frac{3}{2}$, da cui $x = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$. Risposta corretta 6a.

7) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4y + c = 0$ presenta raggio $r = 6$. Il valore del parametro c risulterà uguale a:

☒ 7a) -28
☐ 7b) -18
☐ 7c) 16
☐ 7d) 6

SOLUZIONE: la circonferenza proposta ha raggio uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 - 4c} = \sqrt{8-c}$; posto $\sqrt{8-c} = 6$ si ottiene $8 - c = 36$ da cui $c = -28$. Risposta corretta 7a.

8) L'espressione numerica $\frac{\sqrt{2^{2^3}}}{\sqrt[3]{2^{3^2}}}$ è uguale a:

☐ 8a) 4
☒ 8b) 2
☐ 8c) $\frac{1}{4}$
☐ 8d) $\frac{1}{2}$

SOLUZIONE: $\frac{\sqrt{2^{2^3}}}{\sqrt[3]{2^{3^2}}} = \frac{2^{2^2}}{2^3} = \frac{2^4}{2^3} = 2$. Risposta corretta 8b.

9) La retta passante per i vertici delle parabole di equazione $y = 2 - x^2$ e $y = x^2 + 4x + 4$ ha equazione:

☐ 9a) $x + y = -2$
☐ 9b) $x + y = 2$
☒ 9c) $x - y = -2$
☐ 9d) $x - y = 2$

SOLUZIONE: la prima parabola ha vertice nel punto $V_1(0;2)$, mentre la seconda parabola presenta il vertice nel punto $V_2(-2;0)$. Per ottenere l'equazione della retta passante per i due punti di vertice, utilizziamo la classica equazione della retta passante per due punti: $\frac{y-2}{0-2} = \frac{x-0}{-2-0}$ ovvero $\frac{y-2}{-2} = \frac{x}{-2}$ da cui $x - y = -2$. Risposta corretta 9c.

10) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > 2^3$ ha soluzione:

☒ 10a) $x < -1$
☐ 10b) $x < 1$
☐ 10c) $x > -1$

☐ 10d) $x > 1$

SOLUZIONE: la disuguaglianza proposta è equivalente alla $2^{-3x} > 2^3$ a sua volta equivalente a $-3x > 3$, con soluzione $x < -1$. Risposta corretta 10a.

II Versione

1) Siano x_1 e x_2 due numeri razionali. Quale fra le seguenti affermazioni è certamente vera?
☐ 1a) $x_1 + x_2$ può essere sia un numero razionale che un numero irrazionale
☒ 1b) $x_1 + x_2$ è un numero razionale
☐ 1c) $x_1 + x_2$ è certamente un numero naturale
☐ 1d) $x_1 + x_2$ è un numero irrazionale
SOLUZIONE: per la proprietà di densità dei numeri razionali, la somma di due numeri razionali è certamente un numero razionale, ma non si può affermare con certezza che tale somma sia un numero naturale. Risposta corretta 1b.

2) La disuguaglianza $log(x^2 - x - 1) > 0$ è verificata per:
☐ 2a) $x > 2$
☒ 2b) $x < -1 \ \vee \ x > 2$
☐ 2c) $x < -1$
☐ 2d) $-1 < x < 2$
SOLUZIONE: il logaritmo ha base maggiore di 1 e di conseguenza esso è positivo se e solo se il suo argomento è maggiore di 1; la disuguaglianza proposta è equivalente alla $x^2 - x - 1 > 1$ ovvero $x^2 - x - 2 > 0$. Disequazione di secondo grado, calcoliamo il suo discriminante: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0$; determiniamo le due radici associate:

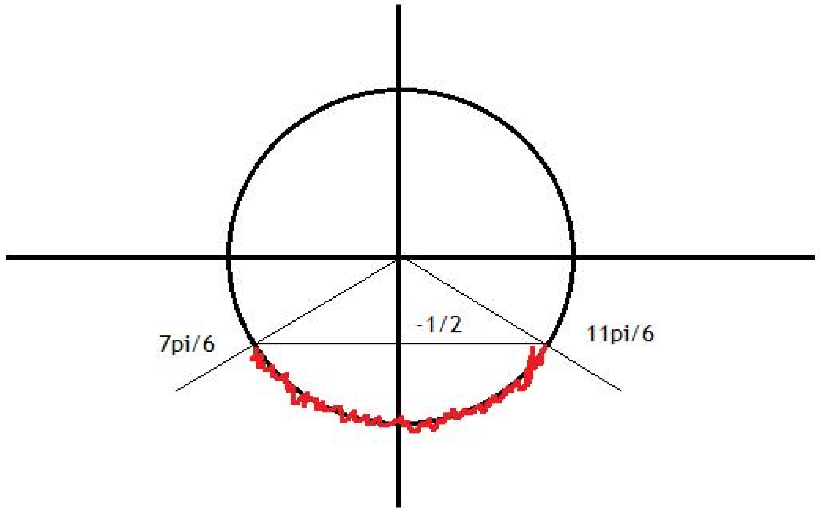
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ \searrow \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{array}$$

. La disequazione presenta soluzioni esterne alle radici, quindi S: $x < -1 \ \vee \ x > 2$. Risposta corretta 2b.

3) Si considerino gli insiemi A, B, C e D con:
$A = \{a, e, i, o, u\}$, insieme delle cinque vocali dell'alfabeto italiano;
$B = \{a, b, c, \ldots, u, v, z\}$, insieme delle ventuno lettere dell'alfabeto italiano;
$C = \{a, b, c, \ldots, j, k, \ldots, w, x, y, z\}$, insieme delle ventisei lettere dell'alfabeto inglese;
$D = (A \backslash B) \cup C$.
Risulta:
☒ 3a) $D = C$
☐ 3b) $D = B$
☐ 3c) $D = \emptyset$
☐ 3d) $D = A$
SOLUZIONE: l'insieme A è contenuto nell'insieme B, di conseguenza $A \backslash B = \emptyset$ e quindi $D = (A \backslash B) \cup C = \emptyset \cup C = C$. Risposta corretta 3a.

4) $sen(x) \leq -\dfrac{1}{2}$ ha soluzione:
☐ 4a) $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi$
☒ 4b) $\dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi$
☐ 4c) $\pi + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi$
☐ 4d) $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi$

SOLUZIONE: relativamente al primo giro sulla circonferenza goniometrica (vedi immagine seguente), la funzione $sen(x)$, che si misura sulle ordinate, è minore o uguale a $-\frac{1}{2}$ se e solo se $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$, aggiungendo la periodicità della funzione seno, pari a 2π, si ottiene la soluzione generale: $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$. Risposta corretta 4b.



5) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4y + c = 0$ presenta raggio $r = 6$. Il valore del parametro c risulterà uguale a:

☐ 5a) 16
☐ 5b) 6
☒ 5c) -28
☐ 5d) -18

SOLUZIONE: la circonferenza proposta ha raggio uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 - 4c} = \sqrt{8-c}$; posto $\sqrt{8-c} = 6$ si ottiene $8 - c = 36$ da cui $c = -28$. Risposta corretta 5c.

6) L'espressione numerica $\dfrac{\sqrt{2^{2^3}}}{\sqrt[3]{2^{3^2}}}$ è uguale a:

☐ 6a) $\frac{1}{4}$
☐ 6b) $\frac{1}{2}$
☒ 6c) 2
☐ 6d) 4

SOLUZIONE: $\dfrac{\sqrt{2^{2^3}}}{\sqrt[3]{2^{3^2}}} = \dfrac{2^{2^2}}{2^3} = \dfrac{2^4}{2^3} = 2$. Risposta corretta 6c.

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > 2^3$ ha soluzione:

☐ 7a) $x < 1$
☒ 7b) $x < -1$
☐ 7c) $x > -1$
☐ 7d) $x > 1$

SOLUZIONE: la disuguaglianza proposta è equivalente alla $2^{-3x} > 2^3$ a sua volta equivalente a $-3x > 3$, con soluzione $x < -1$. Risposta corretta 7b.

8) La retta passante per i vertici delle parabole di equazione $y = 2 - x^2$ e $y = x^2 + 4x + 4$ ha equazione:

☒ 8a) $x - y = -2$
☐ 8b) $x + y = 2$
☐ 8c) $x + y = -2$
☐ 8d) $x - y = 2$

SOLUZIONE: la prima parabola ha vertice nel punto $V_1(0;2)$, mentre la seconda parabola presenta il vertice nel punto $V_2(-2;0)$. Per ottenere l'equazione della retta passante per i due punti di vertice, utilizziamo la classica equazione della retta passante per due punti: $\frac{y-2}{0-2} = \frac{x-0}{-2-0}$ ovvero $\frac{y-2}{-2} = \frac{x}{-2}$ da cui $x - y = -2$. Risposta corretta 8a.

9) Data l'equazione $log_x 5 = \frac{2}{3}$, si ha che:

☐ 9a) $x = 5$
☐ 9b) $x = 25$
☐ 9c) $x = \frac{2}{5}$
☒ 9d) $x = 5\sqrt{5}$

SOLUZIONE: per le proprietà dei logaritmi $log_x 5 = \frac{1}{log_5 x}$, pertanto l'equazione proposta può essere riscritta come: $log_5 x = \frac{3}{2}$, da cui $x = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$. Risposta corretta 9d.

10) Data una circonferenza di raggio r, una corda $\overline{AB}$ tracciata in essa e dato α l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda, la lunghezza di $\overline{AB}$ è:

☒ 10a) $2r \cdot sen(\alpha)$
☐ 10b) $2r \cdot cos(\alpha)$
☐ 10c) $2r \cdot sen^2(\alpha)$
☐ 10d) $2r \cdot tg(\alpha)$

SOLUZIONE: per il Teorema della corda, la lunghezza di una corda $\overline{AB}$ che insiste su un angolo alla circonferenza di ampiezza α è pari al diametro della circonferenza per il seno dell'angolo α. Risposta corretta 10a.