Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

4 novembre 2024

Compito $\mathbb{A}$**1**- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to 2} -3x + \frac{1}{5}$.

$\lim\limits_{x \to 2} -3x + \frac{1}{5} = -\frac{29}{5}$. Per la verifica del limite abbiamo

$\left| -3x + \frac{1}{5} - \left(-\frac{29}{5} \right) \right| = \left| -3x + 6 \right| = 3\left|x - 2\right|$; posto $3\left|x-2\right| < \epsilon$

abbiamo $\left|x-2\right| < \frac{\epsilon}{3}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{3}$.

2) Si data la funzione di espressione $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \le -1 \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ ax + b & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} a = a$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 1 - x^2 = 0$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} ax + b = a + b$.

La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $a = 0$ e $a + b = 0$, da cui $b = 0$.

3) Date le funzioni $f(x) = 2 - x^3$ e $g(x) = 2^{1-x}$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $g(f(f(x)))$.

$f(g(x)) = f(2^{1-x}) = 2 - \left(2^{1-x}\right)^3 = 2 - 8^{1-x}$;

$g(f(x)) = g(2 - x^3) = 2^{1-(2-x^3)} = 2^{x^3-1}$; $g(f(f(x))) = 2^{f(x)^3-1} = 2^{(2-x^3)^3-1}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q\, o\, p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

p	q	$q\, o\, p$	$p \Leftrightarrow q$	$(q\, o\, p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{log(1 + 2x^2)}{sen\, x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + 5x^3}{3 + 2x + 2x^2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1 + 2x^2)}{sen\, x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1+2x^2)}{2x^2} \cdot 2}{\frac{sen\, x^2}{x^2}} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1)} = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 5x^3}{3 + 2x + 2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + 5x\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + 2\right)} = \frac{(\to 0) + (\to +\infty)}{(\to 0) + (\to 0) + 2} = +\infty.$$

Compito $\mathbb{A}$**2**- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to 1} 4x + \frac{5}{2}$.

$\lim_{x \to 1} 4x + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$. Per la verifica del limite abbiamo
$\left|4x + \frac{5}{2} - \frac{13}{2}\right| = \left|4x - 4\right| = 4\left|x - 1\right|$; posto $4\left|x-1\right| < \epsilon$ abbiamo
$\left|x-1\right| < \frac{\epsilon}{4}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{4}$.

2) Si data la funzione di espressione $f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{se } x \le -3 \\ x + x^2 & \text{se } -3 < x < 3 \\ b & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} ax - b = -3a - b;$
$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} x + x^2 = 6;$
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x + x^2 = 12;$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} b = b.$
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $-3a - b = 6$ e $b = 12$, da cui $a = -6$.

3) Date le funzioni $f(x) = 2x^2 - 3$ e $g(x) = 5^{-2x}$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $g(g(f(x)))$.
$f(g(x)) = f(5^{-2x}) = 2(5^{-2x})^2 - 3 = 2 \cdot 5^{-4x} - 3$;
$g(f(x)) = g(2x^2 - 3) = 5^{-2(2x^2-3)} = 5^{-4x^2+6}$;
$g(g(f(x))) = g\left(5^{-4x^2+6}\right) = 5^{-2 \cdot 5^{-4x^2+6}}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\, e\, q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$.

p	q	$p\, e\, q$	$q \Leftrightarrow p$	$(p\, e\, q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(3x)}{sen^2(2x)}$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{3 + 2x - 5x^2}{1 + 2x^3}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(3x)}{sen^2(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-cos(3x)}{9x^2} \cdot 9}{\left(\frac{sen(2x)}{2x}\right)^2 \cdot 4} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 9}{(\to 1) \cdot 4} = \frac{9}{8}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 + 2x - 5x^2}{1 + 2x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 5\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + 2x\right)} = \frac{(\to 0) + (\to 0) - 5}{(\to 0) + (\to -\infty)} = 0.$$

Compito A3 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to -1} 3 + \frac{1}{6}x$.

$\lim_{x \to -1} 3 + \frac{1}{6}x = \frac{17}{6}$. Per la verifica del limite abbiamo
$\left|3 + \frac{1}{6}x - \frac{17}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}\left|x + 1\right|$; posto $\frac{1}{6}\left|x+1\right| < \epsilon$ abbiamo
$\left|x+1\right| < 6\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = 6\epsilon$.

2) Si data la funzione di espressione $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } x < -2 \\ ax-b & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} 3x-2 = -8;$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} ax-b = -2a-b;$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} ax-b = 2a-b;$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$

La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $-2a-b = -8$ e $2a-b = \frac{1}{2}$, da cui $a = \frac{17}{8}$ e $b = \frac{15}{4}$.

3) Date le funzioni $f(x) = 2x-7$ e $g(x) = log\left(2+x^2\right)$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $f(g(f(x)))$.

$f(g(x)) = f(log(2+x^2)) = 2\,log(2+x^2) - 7;$

$g(f(x)) = g(2x-7) = log\left(2+(2x-7)^2\right);$

$f(g(f(x))) = f\left(log\left(2+(2x-7)^2\right)\right) = 2\,log\left(2+(2x-7)^2\right) - 7.$

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\, o \neg q) \Leftrightarrow (q\, e\, p)$.

p	q	$p\,o\neg q$	$q\,e\,p$	$(p\,o\neg q) \Leftrightarrow (q\,e\,p)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cos(-2x)}{sen(2x^2)}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-2x^2-x^4}{10-x^3}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(-2x)}{sen(2x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-cos(-2x)}{4x^2} \cdot 4}{\frac{sen(2x^2)}{2x^2} \cdot 2} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 4}{(\to 1) \cdot 2} = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-2x^2-x^4}{10-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x} - x\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{10}{x^3} - 1\right)} = \frac{(\to 0) - (\to 0) - (\to -\infty)}{(\to 0) - 1}$$

$= -\infty.$

Compito A4 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to 10} 2 - \frac{3}{2}x$.

$\lim\limits_{x \to 10} 2 - \frac{3}{2}x = -13$. Per la verifica del limite abbiamo

$\left|2 - \frac{3}{2}x - (-13)\right| = \left|\frac{3}{2}x - 15\right| = \frac{3}{2}|x-10|$; posto $\frac{3}{2}|x-10| < \epsilon$ abbiamo $|x-10| < \frac{2}{3}\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$.

2) Si data la funzione di espressione $f(x) = \begin{cases} x^3-1 & \text{se } x < 0 \\ ax+b & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 - 1 = -1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ax + b = b$;
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax + b = 2a + b$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2^{\frac{1}{x}} = \sqrt{2}$.
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $b = -1$ e $2a + b = \sqrt{2}$, da cui
$a = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

3) Date le funzioni $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ e $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $g(f(g(x)))$.

$f(g(x)) = f\left(\sqrt{1+x^2}\right) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$;

$g(f(x)) = g\left(3 - \frac{1}{2}x\right) = \sqrt{1 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2}$;

$g(f(g(x))) = g\left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) = \sqrt{1 + \left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right)^2}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q\, e\, p)$.

p	q	$\neg p \Rightarrow q$	$q\, e\, p$	$(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q\, e\, p)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(-3x^2)}{e^{2x^2} - 1}$; $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 6x^2 + x^3}{12 - 5x^3}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(-3x^2)}{e^{2x^2} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen(-3x^2)}{-3x^2} \cdot (-3)}{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} \cdot 2} = \frac{(\to 1) \cdot (-3)}{(\to 1) \cdot 2} = -\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 6x^2 + x^3}{12 - 5x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{6}{x} + 1\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{12}{x^3} - 5\right)} = \frac{(\to 0) + (\to 0) + 1}{(\to 0) - 5} =$$
$$-\frac{1}{5}.$$

Compito A5 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to 6} 2x + \frac{1}{2}$.

$\lim_{x \to 6} 2x + \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$. Per la verifica del limite abbiamo
$\left|2x + \frac{1}{2} - \frac{25}{2}\right| = \left|2x - 12\right| = 2\left|x - 6\right|$; posto $2\left|x - 6\right| < \epsilon$ abbiamo
$\left|x - 6\right| < \frac{\epsilon}{2}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$.

2) Si data la funzione di espressione $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq -3 \\ 4x^2 & \text{se } -3 < x < 3 \\ b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} ax + b = -3a + b$;
$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} 4x^2 = 36$;

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 4x^2 = 36$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} b = b$.
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $-3a + b = b = 36$, da cui $a = 0$.

3) Date le funzioni $f(x) = 3 - x$ e $g(x) = 6^{3+x}$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $g(g(f(x)))$.
$f(g(x)) = f(6^{3+x}) = 3 - 6^{3+x}$; $g(f(x)) = g(3-x) = 6^{3+3-x} = 6^{6-x}$;
$g(g(f(x))) = g(6^{6-x}) = 6^{3+6^{6-x}}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(q\, o\, p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

p	q	$\neg(q\, o\, p)$	$p \Rightarrow q$	$\neg(q\, o\, p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to -\infty} \frac{10 - 5x}{1 + 2x - 2x^2}$; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(-2x)}{sen^2\, x}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{10 - 5x}{1 + 2x - 2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(\frac{10}{x} - 5\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} + 2 - 2x\right)} =$$
$$\frac{(\to 0) - 5}{(\to 0) + 2 - (\to -\infty)} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(-2x)}{sen^2\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - cos(-2x)}{4x^2} \cdot 4}{\left(\frac{sen\, x}{x}\right)^2} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 4}{(\to 1)} = 2.$$

Compito A6 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to -1} 5 + \frac{4}{3}x$.
$\lim_{x \to -1} 5 + \frac{4}{3}x = \frac{11}{3}$. Per la verifica del limite abbiamo
$\left|5 + \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}\right| = \left|\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}\left|x + 1\right|$; posto $\frac{4}{3}\left|x + 1\right| < \epsilon$ abbiamo
$\left|x + 1\right| < \frac{3}{4}\epsilon$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{3}{4}\epsilon$.

2) Si data la funzione di espressione $f(x) = \begin{cases} -ax + b & \text{se } x \leq -2 \\ 3x + x^2 & \text{se } -2 < x < 0. \\ b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -ax + b = 2a + b$;
$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 3x + x^2 = -2$;
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 3x + x^2 = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} b = b$.
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $2a + b = -2$ e $b = 0$, da cui $a = -1$.

3) Date le funzioni $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ e $g(x) = 5^x$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$ e $g(f(f(x)))$.
$f(g(x)) = f(5^x) = \sqrt{2 \cdot 5^x - 3}$; $g(f(x)) = g\left(\sqrt{2x - 3}\right) = 5^{\sqrt{2x-3}}$;
$g(f(f(x))) = 5^{\sqrt{2f(x) - 3}} = 5^{\sqrt{2\sqrt{2x-3} - 3}}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow q)\, e \neg(q \Leftrightarrow p)$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(q \Leftrightarrow p)$	$(p \Rightarrow q)\, e \neg(q \Leftrightarrow p)$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\underset{x \to +\infty}{lim} \dfrac{3+2x^3}{1-2x+4x^2}$; $\underset{x \to 0}{lim} \dfrac{e^{x^2}-1}{sen(2x^2)}$.

$$\underset{x \to +\infty}{lim} \frac{3+2x^3}{1-2x+4x^2} = \underset{x \to +\infty}{lim} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2}+2x\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+4\right)} = \frac{(\to 0)+(\to +\infty)}{(\to 0)+(\to 0)+4} = +\infty.$$

$$\underset{x \to 0}{lim} \frac{e^{x^2}-1}{sen(2x^2)} = \underset{x \to 0}{lim} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{sen(2x^2)}{2x^2}\cdot 2} = \frac{(\to 1)}{(\to 1)\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$