Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

4 novembre 2024

Compito $\mathbb{B}\mathbb{1}$- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$. Per la verifica del limite poniamo $\left|\frac{1}{x^4}\right| = \frac{1}{x^4} < \epsilon$ da cui $x^4 > \frac{1}{\epsilon}$ ed infine $x > \sqrt[4]{\frac{1}{\epsilon}}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \sqrt[4]{\frac{1}{\epsilon}}$.

2) Siano dati gli insiemi $A =]-\infty, -5[\cup [1, +\infty[$ e $B = [0, 20[$. Indicare il derivato del complementare dell'unione fra i due insiemi: $\mathcal{D}\big(\mathcal{C}(A \cup B)\big)$; e la frontiera dell'unione fra i complementari dei due insiemi: $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)\big)$.

$A \cup B =]-\infty, -5[\cup [0, +\infty[$; $\mathcal{C}(A \cup B) = [-5, 0[$; $\mathcal{D}\big(\mathcal{C}(A \cup B)\big) = [-5, 0]$.
Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cap B)$ e di conseguenza $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)\big) = \delta\big(\mathcal{C}(A \cap B)\big) = \delta\big(A \cap B\big)$; $A \cap B = [1, 20[$ e $\delta\big(A \cap B\big) = \{1, 20\}$.

3) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 2^{x-1}$ e che $f(g(x)) = 3x - 5$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

Da $f(x) = 2^{x-1}$ si ottiene $f(g(x)) = 2^{g(x)-1}$; posto $2^{g(x)-1} = 3x - 5$ si ottiene facilmente $g(x) = 1 + log_2(3x - 5)$. Per determinare la funzione inversa di g poniamo $1 + log_2(3x - 5) = y$ da cui $3x - 5 = 2^{y-1}$ ed infine $x = \frac{2^{y-1} + 5}{3}$;
$g^{-1}(x) = \frac{2^{x-1} + 5}{3}$.

4) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow non\,\mathbb{B})\; o\; (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Leftrightarrow non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$	$\mathbb{P}$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	V

La proposizione $\mathbb{P}$ risulta una tautologia.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{tg(3x + x^2)}{sen(2x)}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4 + x}{3 + x}\right)^{3+x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(3x + x^2)}{sen(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg(3x+x^2)}{3x+x^2} \cdot (3 + x)}{\frac{sen(2x)}{2x} \cdot 2} = \frac{(\to 1) \cdot (\to 3)}{(\to 1) \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4 + x}{3 + x}\right)^{3+x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3 + x}\right)^{3+x} = e.$$

Compito $\mathbb{B}$2- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^8}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^8} = 0$. Per la verifica del limite poniamo $\left|\dfrac{1}{x^8}\right| = \dfrac{1}{x^8} < \epsilon$ da cui $x^8 > \dfrac{1}{\epsilon}$ ed infine $x > \sqrt[8]{\dfrac{1}{\epsilon}}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \sqrt[8]{\dfrac{1}{\epsilon}}$.

2) Siano dati gli insiemi $A =]-\infty, -5[\cup [1, +\infty[$ e $B = [0, 20[$. Indicare il derivato del complementare dell'intersezione fra i due insiemi: $\mathcal{D}\big(\mathcal{C}(A \cap B)\big)$; e la frontiera dell'intersezione fra i complementari dei due insiemi: $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)\big)$.
$A \cap B = [1, 20[$; $\mathcal{C}(A \cap B) =]-\infty, 1[\cup [20, +\infty[$;
$\mathcal{D}\big(\mathcal{C}(A \cap B)\big) =]-\infty, 1] \cup [20, +\infty[$.
Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cup B)$ e di conseguenza $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)\big) = \delta\big(\mathcal{C}(A \cup B)\big) = \delta\big(A \cup B\big)$; $A \cup B =]-\infty, -5[\cup [0, +\infty[$ e $\delta\big(A \cup B\big) = \{-5, 0\}$.

3) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 3^{x+1}$ e che $f(g(x)) = 5x + 2$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.
Da $f(x) = 3^{x+1}$ si ottiene $f(g(x)) = 3^{g(x)+1}$; posto $3^{g(x)+1} = 5x + 2$ si ottiene facilmente $g(x) = log_3(5x + 2) - 1$. Per determinare la funzione inversa di g poniamo $log_3(5x + 2) - 1 = y$ da cui $5x + 2 = 3^{y+1}$ ed infine $x = \dfrac{3^{y+1} - 2}{5}$;
$g^{-1}(x) = \dfrac{3^{x+1} - 2}{5}$.

4) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P} : (non\,\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\; o\; (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{P}$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

La proposizione $\mathbb{P}$ risulta una tautologia.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + 2x)}{tg(3x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3 + x}{2 + x}\right)^{3x+6}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1 + 2x)}{tg(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1+2x)}{2x} \cdot 2}{\frac{tg(3x)}{3x} \cdot 3} = \frac{(\to 1) \cdot 2}{(\to 1) \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 + x}{2 + x}\right)^{3x+6} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2 + x}\right)^{2+x}\right)^3 = (\to e)^3 = e^3.$$

Compito $\mathbb{B}$3- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{6x^2}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{6x^2} = 0$. Per la verifica del limite poniamo $\left|\frac{1}{6x^2}\right| = \frac{1}{6x^2} < \epsilon$ da cui $x^2 > \frac{1}{6\epsilon}$ ed infine $x > \sqrt{\frac{1}{6\epsilon}}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{6\epsilon}}$.

2) Siano dati gli insiemi $A = [-3, 2]$ e $B =]-\infty, -2] \cup [15, +\infty[$. Indicare il complementare del derivato dell'unione fra i due insiemi: $\mathcal{C}(\mathcal{D}(A \cup B))$; e la frontiera dell'intersezione fra i complementari dei due insiemi: $\delta(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$.
$A \cup B =]-\infty, 2] \cup [15, +\infty[$ insieme chiuso quindi $\mathcal{D}(A \cup B) = A \cup B$, $\mathcal{C}(A \cup B) =]2, 15[$.
Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cup B)$ e di conseguenza $\delta(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)) = \delta(\mathcal{C}(A \cup B)) = \delta(A \cup B) = \{2, 15\}$.

3) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 2^{x+1}$ e che $f(g(x)) = 2x - 3$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.
Da $f(x) = 2^{x+1}$ si ottiene $f(g(x)) = 2^{g(x)+1}$; posto $2^{g(x)+1} = 2x - 3$ si ottiene facilmente $g(x) = log_2(2x - 3) - 1$. Per determinare la funzione inversa di g poniamo $log_2(2x - 3) - 1 = y$ da cui $2x - 3 = 2^{y+1}$ ed infine $x = \frac{2^{y+1} + 3}{2}$; $g^{-1}(x) = \frac{2^{x+1} + 3}{2}$.

4) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B})\; o\; (non\, \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}$	$non\, \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}$	$\mathbb{P}$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V.
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

La proposizione $\mathbb{P}$ non risulta una tautologia.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{log(1+3x)}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x+6}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{log(1+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(1+x)^3-1}{x}}{\frac{log(1+3x)}{3x} \cdot 3} = \frac{(\to 3)}{(\to 1) \cdot 3} = 1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x+6} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right)^2 = (\to e)^2 = e^2.$$

Compito B4 - Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x^2}$.
$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x^2} = 0$. Per la verifica del limite poniamo $\left|-\frac{1}{2x^2}\right| = \frac{1}{2x^2} < \epsilon$ da cui $x^2 > \frac{1}{2\epsilon}$ ed infine $x > \sqrt{\frac{1}{2\epsilon}}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{2\epsilon}}$.

2) Siano dati gli insiemi $A = [-3, 2]$ e $B =]-\infty, -2] \cup [15, +\infty[$. Indicare il complementare del derivato dell'intersezione fra i due insiemi: $\mathcal{C}(\mathcal{D}(A \cap B))$; e la frontiera dell'unione fra i complementari dei due insiemi: $\delta(\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B))$.

$A\cap B=[-3,\,-2]$ insieme chiuso quindi $\mathcal{D}(A\cap B)=A\cap B$,
$\mathcal{C}\big(A\cap B\big)=]-\infty,\,-3[\cup]-2,\,+\infty[$.
Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A)\cup\mathcal{C}(B)=\mathcal{C}(A\cap B)$ e di conseguenza
$\delta\big(\mathcal{C}(A)\cup\mathcal{C}(B)\big)=\delta\big(\mathcal{C}(A\cap B)\big)=\delta\big(A\cap B\big)=\{-3,\,-2\}$.

3) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=3^{2-x}$ e che $f(g(x))=2x+1$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.
Da $f(x)=3^{2-x}$ si ottiene $f(g(x))=3^{2-g(x)}$; posto $3^{2-g(x)}=2x+1$ si ottiene facilmente $g(x)=2-log_3(2x+1)$. Per determinare la funzione inversa di g poniamo $2-log_3(2x+1)=y$ da cui $2x+1=3^{2-y}$ ed infine $x=\dfrac{3^{2-y}-1}{2}$;
$g^{-1}(x)=\dfrac{3^{2-x}-1}{2}$.

4) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P}:(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{P}$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V.
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V

La proposizione $\mathbb{P}$ non risulta una tautologia.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{sen\,x}-1}{tg(2x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+5}\right)^{4x+10}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{sen\,x}-1}{tg(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^{sen\,x}-1}{sen\,x}\cdot\frac{sen\,x}{x}}{\frac{tg(2x)}{2x}\cdot 2}=\frac{(\to log\,3)\cdot(\to 1)}{(\to 1)\cdot 2}=\frac{1}{2}log\,3=log\sqrt{3}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+6}{2x+5}\right)^{4x+10}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x+5}\right)^{2x+5}\right)^{2}=(\to e)^2=e^2.$$