Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2022-23)
18 marzo 2024
Compito $\mathbb{M}1$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici; sotto l'ipotesi che una e solo una fra le tre proposizioni semplici sia vera, costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(\neg p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$.

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i tre casi in cui una e solo una fra le tre proposizioni semplici risulta vera.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow r$	$\neg(\neg p \Rightarrow r)$	$q \Rightarrow r$	$\neg(\neg p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	F

.

2) (7 punti) Sia dato l'intervallo $\mathcal{I}_1 = [-3, 2]$ e sia $\mathcal{I}_2$ un secondo intervallo tale per cui: $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = [-3, +\infty[$ e $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$. Determinare l'intervallo $\mathcal{I}_2$, e dopo aver determinato tale intervallo calcolare gli insiemi $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1) \cap \mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{C}(\mathcal{I}_2)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

2) Da $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = [-3, +\infty[$ si ottiene facilmente che $\mathcal{I}_2$ è superiormente illimitato e $-3 \leq Inf(\mathcal{I}_2) \leq 2$; se $\mathcal{C}(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ allora $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = [0, 2]$ e di conseguenza $Inf(\mathcal{I}_2) = 0 \in \mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_2 = [0, +\infty[$.
$\mathcal{C}(\mathcal{I}_1) \cap \mathcal{I}_2 = \mathcal{C}([-3, 2]) \cap [0, +\infty[=]2, +\infty[$;
$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{C}(\mathcal{I}_2) = [-3, 2] \cup \mathcal{C}([0, +\infty[) =]-\infty, 2]$.

3) (6 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x-4}{2}$.

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x-4}{2} = 3$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\dfrac{5x-4}{2} - 3\right| = \left|\dfrac{5x-10}{2}\right| = \dfrac{5}{2}\left|x-2\right|$, posto $\dfrac{5}{2}\left|x-2\right| < \epsilon$ risulta $\left|x-2\right| < \dfrac{2}{5}\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{2}{5}\epsilon$, limite verificato.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - sen\, x}{x^2 + 3\cos x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \dfrac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = (\to 1) + (\to 1) = 2$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2x - e^{-x^2} \cdot (-2x)}{2x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2x}\left(e^{x^2} + e^{-x^2}\right)}{\cancel{2x}} = \lim_{x \to 0} \left(e^{x^2} + e^{-x^2}\right) = (\to 1) + (\to 1) = 2.$$

La soluzione del limite può essere ottenuta anche con l'utilizzo del polinomio di MacLaurin; ricordiamo che $e^x = 1 + x + o(x)$, quindi $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ e $e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(-x^2)$, sostituendo le espressioni prima ottenute nel limite abbiamo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x^2 + o(x^2)) - (1 - x^2 + o(-x^2))}{x^2} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(2 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = 2$. (Per l'algebra degli o-piccolo si rammenta che $o(-h) = o(h)$ e $o(h) + o(h) = o(h)$)

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $sen\, x = o(x^3)$ e $3\, cos\, x = o(x^2)$ da cui $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - sen\, x}{x^2 + 3\, cos\, x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} =$ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. (La seconda uguaglianza è ottenuta per il principio di esclusione)

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = e^{1-x^2}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{1-(-x)^2} = e^{1-x^2} = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ per ogni $x \in [0, +\infty[$ in quanto funzione esponenziale. $y(0) = e$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

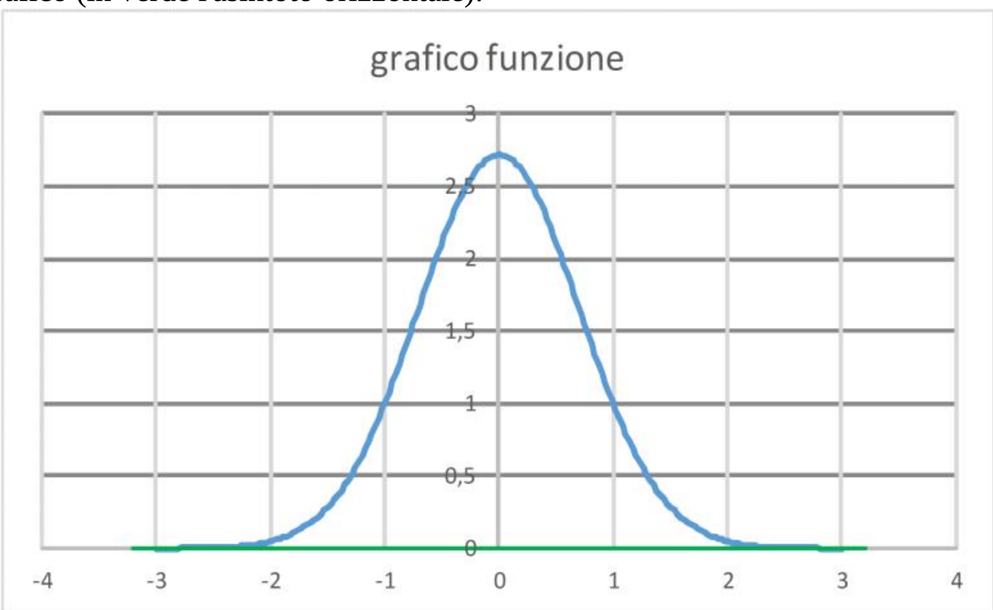
$\lim_{x \to +\infty} e^{1-x^2} = e^{(\to -\infty)} = 0$. $AsOr$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{1-x^2}$. $y' < 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0, +\infty[$. Punto di massimo assoluto in $M(0, e)$.

Concavità e convessità: $y'' = -2 \cdot e^{1-x^2} - 2xe^{1-x^2} \cdot (-2x) = 2(2x^2 - 1)e^{1-x^2}$.

$y'' > 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{2}}$. Funzione strettamente concava in $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$, strettamente convessa in $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, punto di flesso di coordinate $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{e}\right)$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

6) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx \;=\; \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x}\right)_1^2 \;=\; \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) \;=\; \frac{19}{6} - \frac{4}{3} \;=\; \frac{11}{6}$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x + 2$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[0, 2]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) Le funzioni f e g sono continue e derivabili su tutto l'insieme dei numeri reali, quindi sono continue e derivabili nell'intervallo $[0, 2]$, $\forall x \in [0, 2]$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) = 3 \neq 0$. Il Teorema è applicabile. $f(2) = 5$, $f(0) = 1$, $g(2) = 8$, $g(0) = 2$ e $\dfrac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \dfrac{5 - 1}{8 - 2} = \dfrac{2}{3}$. $f'(x) = 2x$ con $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2}{3}x$; posto $\dfrac{2}{3}x = \dfrac{2}{3}$ si ottiene facilmente $x = 1$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Studiare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 + 2x^2 - 4x - y^2$.

8) $\nabla f = (3x^2 + 4x - 4,\; -2y)$.

FOC: $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$; la seconda equazione del sistema ha come unica soluzione $y = 0$, per la prima calcoliamo il suo discriminante:

$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 64 > 0$, le soluzioni sono $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \dfrac{-4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-4-8}{6} = -2 \\ \searrow x_2 = \frac{-4+8}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$. La funzione presenta due punti critici $P_1(-2, 0)$ e $P_2\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x + 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -2(6x + 4) = -4(3x + 2)$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 16 > 0$, $f''_{yy}(P_1) = -2 < 0$. P_1 punto di massimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -16 < 0$. P_2 punto di sella.