Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)
10 gennaio 2025

Compito $\mathbb{G}1$

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| < e\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 5^{3+x} > 25\}$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $\mathcal{C}(A \cup B)$, ed i relativi insiemi di chiusura: $\overline{A \cap B}$ e $\overline{\mathcal{C}(A \cup B)}$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| < e\} = \{x \in \mathbb{R}: -e < x < e\} =]-e, e[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 5^{3+x} > 25\} = \{x \in \mathbb{R}: 5^{3+x} > 5^2\} = \{x \in \mathbb{R}: 3 + x > 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x > -1\} =]-1, +\infty[$;
$A \cap B =]-e, e[\cap]-1, +\infty[=]-1, e[$; $\overline{A \cap B} = [-1, e]$;
$A \cup B =]-e, e[\cup]-1, +\infty[=]-e, +\infty[$; $\mathcal{C}(A \cup B) =]-\infty, -e]$, insieme chiuso; $\overline{\mathcal{C}(A \cup B)} = \mathcal{C}(A \cup B)$ perché insieme chiuso.

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(kx)}{3x + x^2} = \dfrac{2}{3}$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(kx)}{3x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(kx)}{x(3 + x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(kx)}{kx} \cdot \dfrac{k}{3 + x} = (\to 1) \cdot \left(\to \dfrac{k}{3}\right) = \dfrac{k}{3}$; posto $\dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{3}$ si ottiene facilmente $k = 2$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a + arctg\, x & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{x} - x^2 & \text{se } 0 < x < 4 \\ b + 2^x & \text{se } x \ge 4 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

3) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a + arctg\, x = a$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} - x^2 = 0$;
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{x} - x^2 = -14$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} b + 2^x = b + 16$.
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $a = 0$ e $b + 16 = -14$, da cui $b = -30$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x + 1}{4x}\right)^x$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} - 1}{2 \cdot sen\, x} \cdot \dfrac{2 \cdot sen\, x}{x} = (\to 1) \cdot (\to 2) = 2$.
Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} - 1}{x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} - 1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} \cdot 2 \cos x}{1} = (\to 1) \cdot (\to 2) = 2$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x + 1}{4x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1/4}{x}\right)^x = e^{1/4} = \sqrt[4]{e}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}\left(1 - x^2\right)$.

5) $C.E.$: $x \ge 0$, $C.E. = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $\sqrt{x} \ge 0\ \forall x \in C.E.$, quindi $\sqrt{x}(1 - x^2) > 0$ se $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. Funzione positiva in $]0, 1[$, negativa in $]1, +\infty[$; punti di intersezione con l'asse delle ascisse $O(0, 0)$ e $A(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(1-x^2) = (\to +\infty)\cdot(\to -\infty) = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(1-x^2)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - x\right) =$
$(\to +\infty)\cdot(\to -\infty) = -\infty$. La funzione non presenta asintoti.

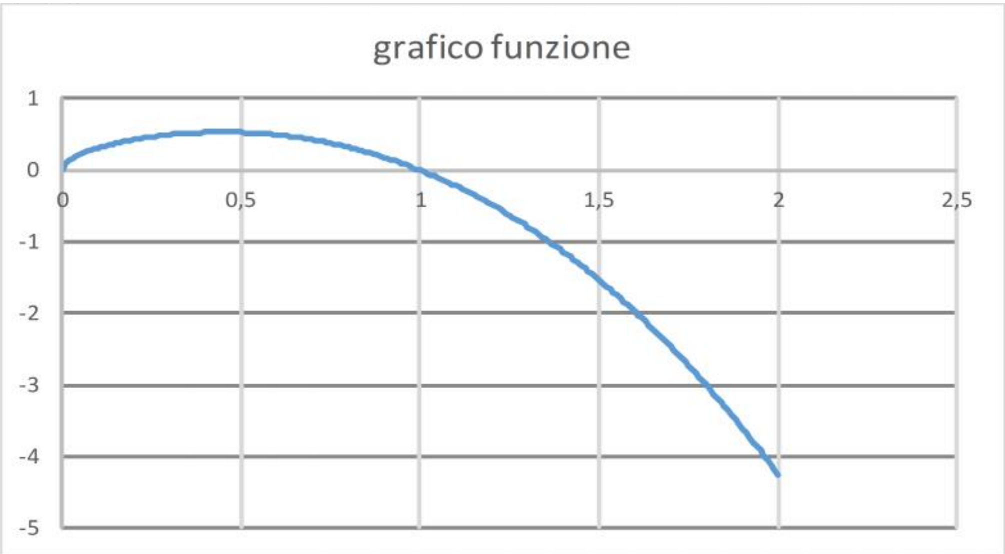
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x^2) + \sqrt{x}(-2x) = \frac{1-x^2-4x^2}{2\sqrt{x}} =$
$\frac{1-5x^2}{2\sqrt{x}}$. $y' > 0$, se $1-5x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{5} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \approx 0.45$.

Funzione strettamente crescente in $\left[0, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{1}{5}\sqrt{5}, +\infty\right[$. Punto di massimo assoluto $x = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ con
$y\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) = \frac{4}{25}\sqrt[4]{125} \approx 0.53$.

Nota che $\lim_{x \to 0^+} y' = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-5x^2}{2\sqrt{x}} = +\infty$; $O(0,0)$ è punto di stop della funzione a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{-10x\cdot 2\sqrt{x} - (1-5x^2)\cdot \cancel{2}\cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} =$
$\frac{-20x^2 - 1 + 5x^2}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} = -\frac{15x^2+1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$. $y'' < 0\ \forall x > 0$. Funzione strettamente concava.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int (2x \cdot log(x))\, dx$.

6) Integriamo per parti: $\int (2x \cdot log(x))\, dx = x^2 \cdot log(x) - \int \left(x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) dx =$
$x^2 \cdot log(x) - \int x\, dx = x^2 \cdot log(x) - \frac{1}{2}x^2 + k = \frac{1}{2}x^2(2\,log(x) - 1) + k$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = log(x)$ e $g(x) = 3x + 4$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[1, 2]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) Le funzioni f e g sono continue e derivabili su tutto l'insieme dei numeri reali positivi, quindi sono continue e derivabili nell'intervallo $[1, 2]$, $\forall x \in [1, 2]$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) = 3 \neq 0$. Il Teorema è applicabile. $f(1) = log\,1 = 0$, $f(2) = log\,2$, $g(1) = 7$, $g(2) = 10$ e $\dfrac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \dfrac{log\,2 - 0}{10 - 7} = \dfrac{log\,2}{3}$. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ con $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{3x}$; posto $\dfrac{1}{3x} = \dfrac{log\,2}{3}$ si ottiene facilmente $x_0 = \dfrac{1}{log\,2} = log_2 e \approx 1.44$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione: $f(x, y, z, w) = \dfrac{w^3 - 2z^2}{x + y}$.

8) $f'_x = -\dfrac{w^3 - 2z^2}{(x+y)^2}$; $\quad f'_y = -\dfrac{w^3 - 2z^2}{(x+y)^2}$;

$f'_z = -\dfrac{4z}{x+y}$; $\quad f'_w = \dfrac{3w^2}{x+y}$.

Compito $\mathbb{G}2$

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 2\pi\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^{1-x} \leq 27\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $\mathcal{C}(A \cap B)$, ed i relativi insiemi frontiera: $\delta(A \cup B)$ e $\delta(\mathcal{C}(A \cap B))$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 2\pi\} = \{x \in \mathbb{R}: -2\pi \leq x \leq 2\pi\} = [-2\pi, 2\pi]$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 3^{1-x} \leq 27\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^{1-x} \leq 3^3\} = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\} = [-2, +\infty[$;
$A \cup B = [-2\pi, 2\pi] \cup [-2, +\infty[= [-2\pi, +\infty[$; $\delta(A \cup B) = \{-2\pi\}$;
$A \cap B = [-2\pi, 2\pi] \cap [-2, +\infty[= [-2, 2\pi]$;
$\mathcal{C}(A \cap B) =]-\infty, -2[\cup]2\pi, +\infty[$; $\delta(\mathcal{C}(A \cap B)) = \{-2, 2\pi\}$.
(*Nota:* per le proprietà dell'insieme frontiera, $\delta(\mathcal{C}(A \cap B)) = \delta(A \cap B) = \{-2, 2\pi\}$; quindi il calcolo dell'insieme $\mathcal{C}(A \cap B)$ può essere eluso)

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1}{x^2 - 2x} = \dfrac{2}{3}$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1}{x(x-2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1}{kx} \cdot \dfrac{k}{x - 2} = (\to 1) \cdot \left(\to -\dfrac{k}{2}\right) = -\dfrac{k}{2}$; posto $-\dfrac{k}{2} = \dfrac{2}{3}$ si ottiene facilmente $k = -\dfrac{4}{3}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{2 - x} & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 + 3x & \text{se } -2 < x < 2 \\ b - log_2 x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

3) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} a + \sqrt{2 - x} = a + 2$;
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} x^2 + 3x = -2$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 + 3x = 10$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} b - log_2 x = b - 1$.
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $a + 2 = -2$ e $b - 1 = 10$, da cui $a = -4$ e $b = 11$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + arcsen\, x)^2 - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-3x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + arcsen\, x)^2 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + arcsen\, x)^2 - 1}{arcsen\, x} \cdot \dfrac{arcsen\, x}{x} =$
$(\to 2) \cdot (\to 1) = 2$.
Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + arcsen\, x)^2 - 1}{x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + arcsen\, x)^2 - 1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(1 + arcsen\, x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} =$
$2 \cdot (\to 1) \cdot (\to 1) = 2$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{-3} = (\to e)^{-3} = e^{-3}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}\left(x^2 - 4\right)$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $\sqrt{x} \geq 0\ \forall x \in C.E.$, quindi $\sqrt{x}(x^2 - 4) > 0$ se $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$. Funzione negativa in $]0, 2[$, positiva in $]2, +\infty[$; punti di intersezione con l'asse delle ascisse $O(0,0)$ e $A(2,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(x^2 - 4\right) = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(x^2 - 4)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(x - \dfrac{4}{x}\right) =$
$(\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2 - 4\right) + \sqrt{x} \cdot 2x = \dfrac{x^2 - 4 + 4x^2}{2\sqrt{x}} =$
$\dfrac{5x^2 - 4}{2\sqrt{x}}$. $y' > 0$, se $5x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > \dfrac{4}{5} \Rightarrow x > \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0.89$.
Funzione strettamente decrescente in $\left[0, \dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right]$, strettamente crescente in $\left[\dfrac{2}{5}\sqrt{5}, +\infty\right[$. Punto di minimo assoluto $x = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ con $y\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right) = -\dfrac{16}{25}\sqrt[4]{500} \approx -3.03$.
Nota che $\lim\limits_{x \to 0^+} y' = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5x^2 - 4}{2\sqrt{x}} = -\infty$; $O(0,0)$ è punto di stop della funzione a tangente verticale.
Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{10x \cdot 2\sqrt{x} - (5x^2 - 4) \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} =$

$\frac{20x^2 - 5x^2 + 4}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} \;=\; \frac{15x^2 + 4}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$. $y'' > 0\ \forall x > 0$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:

.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x \cdot log(3x))\, dx$.

6) Integriamo per parti:

$$\int (x \cdot log(3x))\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 \cdot log(3x) - \int \left(\frac{1}{2}x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}\cancel{x}} \cdot \cancel{3}\right) dx \;=$$
$$\frac{1}{2}x^2 \cdot log(3x) - \int \frac{1}{2}x\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 \cdot log(3x) - \frac{1}{4}x^2 + k \;=$$
$$\frac{1}{4}x^2(2\, log(3x) - 1) + k\, .$$

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = log(x)$ e $g(x) = 2 - 3x$. Verificare che al rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[1, 3]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) Le funzioni f e g sono continue e derivabili su tutto l'insieme dei numeri reali positivi, quindi sono continue e derivabili nell'intervallo $[1, 3]$, $\forall x \in [1, 3],\ g(x) \neq 0$ e $g'(x) = -3 \neq 0$. Il Teorema è applicabile. $f(1) = log\, 1 = 0$, $f(3) = log\, 3$, $g(1) = -1$, $g(3) = -7$ e $\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{log\, 3 - 0}{-7 + 1} = -\frac{log\, 3}{6}$. $f'(x) = \frac{1}{x}$ con $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{3x}$; posto $-\frac{1}{3x} = -\frac{log\, 3}{6}$ si ottiene facilmente $x_0 = \frac{2}{log\, 3} = 2\, log_3 e \approx 1.82$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione: $f(x, y, z, w) = \frac{x^3 - 2z}{w - y^3}$.

8) $f'_x = \frac{3x^2}{w - y^3}$; $\qquad f'_y = -\frac{(x^3 - 2z) \cdot (-3y^2)}{(w - y^3)^2} = \frac{3y^2(x^3 - 2z)}{(w - y^3)^2}$;

$f'_z = -\frac{2}{w - y^3}$; $\qquad f'_w = -\frac{x^3 - 2z}{(w - y^3)^2}$.

Compito $\mathbb{G}3$

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 2e\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^{3-x} < 81\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $\mathcal{C}(A \cap B)$, ed i relativi insiemi derivato: $\mathcal{D}(A \cup B)$ e $\mathcal{D}(\mathcal{C}(A \cap B))$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 2e\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2e \vee x \geq 2e\} = $
$]-\infty, -2e] \cup [2e, +\infty[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 3^{3-x} < 81\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^{3-x} < 3^4\} = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x < 4\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: x > -1\} =]-1, +\infty[$;
$A \cup B = (]-\infty, -2e] \cup [2e, +\infty[) \cup]-1, +\infty[=$
$]-\infty, -2e] \cup]-1, +\infty[$; $\mathcal{D}(A \cup B) =]-\infty, -2e] \cup [-1, +\infty[$;
$A \cap B = (]-\infty, -2e] \cup [2e, +\infty[) \cap]-1, +\infty[= [2e, +\infty[$;
$\mathcal{C}(A \cap B) =]-\infty, 2e[$; $\mathcal{D}(\mathcal{C}(A \cap B)) =]-\infty, 2e]$.

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{3x^2 + kx} = \dfrac{1}{5}$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{3x^2 + kx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x(3x + k)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \dfrac{2}{3x + k} =$
$(\to 1) \cdot \left(\to \dfrac{2}{k}\right) = \dfrac{2}{k}$; posto $\dfrac{2}{k} = \dfrac{1}{5}$ si ottiene facilmente $k = 10$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq -1 \\ a - bx^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ log_2(2x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

3) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 + 2x = -1$;
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} a - bx^3 = a + b$;
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a - bx^3 = a - b$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} log_2(2x) = 1$.
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $a + b = -1$ e $a - b = 1$, da cui $a = 0$ e $b = -1$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{tg\, x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{4x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{tg\, x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{(1+x)^3 - 1}{x}}{\frac{tg\, x}{x}} = \dfrac{(\to 3)}{(\to 1)} = 3$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{tg\, x} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{tg\, x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3(1+x)^2}{1 + tg^2\, x} = \dfrac{(\to 3)}{(\to 1)} = 3$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x\right)^4 = (\to e^{-1})^4 = e^{-4}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}(4 - x^2)$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\sqrt{x} \geq 0 \; \forall x \in C.E.$, quindi $\sqrt{x}(4-x^2) > 0$ se $4-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow 0 < x < 2$. Funzione positiva in $]0,2[$, negativa in $]2, +\infty[$; punti di intersezione con l'asse delle ascisse $O(0,0)$ e $A(2,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(4-x^2\right) = (\to +\infty)\cdot(\to -\infty) = -\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(4-x^2)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{4}{x} - x\right) =$
$(\to +\infty)\cdot(\to -\infty) = -\infty$. La funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(4-x^2\right) + \sqrt{x}(-2x) = \frac{4-x^2-4x^2}{2\sqrt{x}} =$
$\frac{4-5x^2}{2\sqrt{x}}$. $y' > 0$, se $4-5x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < \frac{4}{5} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0.89$.
Funzione strettamente crescente in $\left[0, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{2}{5}\sqrt{5}, +\infty\right[$. Punto di massimo assoluto $x = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ con
$y\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right) = \frac{16}{25}\sqrt[4]{500} \approx 3.03$.
Nota che $\lim\limits_{x \to 0^+} y' = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{4-5x^2}{2\sqrt{x}} = +\infty$; $O(0,0)$ è punto di stop della funzione a tangente verticale.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{-10x\cdot 2\sqrt{x} - (4-5x^2)\cdot \cancel{2}\cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} =$
$\frac{-20x^2-4+5x^2}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} = -\frac{15x^2+4}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$. $y'' < 0 \; \forall x > 0$. Funzione strettamente concava.
Grafico:

.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int (3x \cdot log(x))\, dx$.

6) Integriamo per parti: $\int (3x \cdot log(x))\, dx = \frac{3}{2}x^2 \cdot log(x) - \int \left(\frac{3}{2}x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) dx =$

$$\frac{3}{2}x^2 \cdot log(x) - \int \frac{3}{2}x\,dx \;=\; \frac{3}{2}x^2 \cdot log(x) - \frac{3}{4}x^2 + k \;=\; \frac{3}{4}x^2(2\,log(x) - 1) + k\,.$$

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2 + x$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[0, 3]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) Le funzioni f e g sono continue e derivabili su tutto l'insieme dei numeri reali, quindi sono continue e derivabili nell'intervallo $[0, 3]$, $\forall x \in [0, 3]$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) = 1 \neq 0$. Il Teorema è applicabile. $f(0) = e^0 = 1$, $f(3) = e^3$, $g(0) = 2$, $g(3) = 5$ e $\dfrac{f(3) - f(0)}{g(3) - g(0)} = \dfrac{e^3 - 1}{5 - 2} = \dfrac{e^3 - 1}{3}$. $f'(x) = e^x$ con $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = e^x$; posto $e^x = \dfrac{e^3 - 1}{3}$ si ottiene facilmente $x_0 = log\left(\dfrac{e^3 - 1}{3}\right) \approx 1.85$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:

$$f(x,\, y,\, z,\, w) = w - y^3 + \frac{5x^2}{z - y}\,.$$

8) $$f'_x = \frac{10x}{z - y}\,; \qquad f'_y = -3y^2 - \frac{5x^2 \cdot (-1)}{(z - y)^2} = -3y^2 + \frac{5x^2}{(z - y)^2}\,;$$

$$f'_z = -\frac{5x^2}{(z - y)^2}\,; \qquad f'_w = 1\,.$$

Compito $\mathbb{G}4$

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| > e\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{x+5} \leq 64\}$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $\mathcal{C}(A \cup B)$, ed i relativi insiemi interno: $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$ e $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}(A \cup B)}}$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

1) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| > e\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x < -e \vee x > e\} =]-\infty, -e[\cup]e, +\infty[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{x+5} \leq 64\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{x+5} \leq 2^6\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x + 5 \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 1\} =]-\infty, 1]$;
$A \cap B = (]-\infty, -e[\cup]e, +\infty[) \cap]-\infty, 1] =]-\infty, -e[$, insieme aperto;
$\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = A \cap B$, perché insieme aperto;
$A \cup B = (]-\infty, -e[\cup]e, +\infty[) \cup]-\infty, 1] =]-\infty, 1] \cup]e, +\infty[$;
$\mathcal{C}(A \cup B) =]1, e]$; $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}(A \cup B)}} =]1, e[$.

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{log(1 - kx)}{x + 3x^2} = \frac{1}{5}$.

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{log(1 - kx)}{x + 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1 - kx)}{x(1 + 3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1 - kx)}{-kx} \cdot \frac{-k}{1 + 3x} =$
$(\to 1) \cdot (\to -k) = -k$; posto $-k = \dfrac{1}{5}$ si ottiene facilmente $k = -\dfrac{1}{5}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq -1 \\ a + bx^2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ arctg\, x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

3) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 - 2x = 3;$
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} a + bx^2 = a + b;$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a + bx^2 = a; \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} arctg\, x = 0.$
La funzione è continua sull'insieme $\mathbb{R}$ se $a + b = 3$ e $a = 0$, da cui $b = 3$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3 \cdot tg\, x} - 1}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x} \right)^x$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3 \cdot tg\, x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} (-3) \cdot \frac{e^{-3 \cdot tg\, x} - 1}{-3 \cdot tg\, x} \cdot \frac{tg\, x}{x} =$
$(-3) \cdot (\to 1) \cdot (\to 1) = -3.$
Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3 \cdot tg\, x} - 1}{x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3 \cdot tg\, x} - 1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^{-3 \cdot tg\, x} \cdot (-3) \cdot (1 + tg^2\, x)}{1} =$
$(\to 1) \cdot (-3) \cdot (\to 1) = -3.$
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1/2}{x} \right)^x = e^{-1/2} = \sqrt{1/e}.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}\left(x^2 - 9\right)$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $\sqrt{x} \geq 0\ \forall x \in C.E.$, quindi $\sqrt{x}(x^2 - 9) > 0$ se $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$. Funzione negativa in $]0, 3[$, positiva in $]3, +\infty[$; punti di intersezione con l'asse delle ascisse $O(0,0)$ e $A(3,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(x^2 - 9\right) = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty.$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(x^2 - 9)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(x - \frac{9}{x} \right) =$
$(\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2 - 9\right) + \sqrt{x} \cdot 2x = \frac{x^2 - 9 + 4x^2}{2\sqrt{x}} =$
$\frac{5x^2 - 9}{2\sqrt{x}}$. $y' > 0$, se $5x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{9}{5} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5} \approx 1.34.$
Funzione strettamente decrescente in $\left[0, \frac{3}{5}\sqrt{5}\right]$, strettamente crescente in $\left[\frac{3}{5}\sqrt{5}, +\infty\right[$. Punto di minimo assoluto $x = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ con $y\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}\right) = -\frac{36}{25}\sqrt[4]{1125} \approx -8.34$.
Nota che $\lim_{x \to 0^+} y' = \lim_{x \to 0^+} \frac{5x^2 - 9}{2\sqrt{x}} = -\infty$; $O(0,0)$ è punto di stop della funzione a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{10x \cdot 2\sqrt{x} - (5x^2 - 9) \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} =$

$\dfrac{20x^2 - 5x^2 + 9}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} = \dfrac{15x^2 + 9}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$. $y'' > 0 \; \forall x > 0$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:

.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int (x \cdot log(5x)) \, dx$.

6) Integriamo per parti:

$\displaystyle\int (x \cdot log(5x)) \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot log(5x) - \int \left(\frac{1}{2}x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{5}\cancel{x}} \cdot \cancel{5}\right) dx =$

$\displaystyle\frac{1}{2}x^2 \cdot log(5x) - \int \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot log(5x) - \frac{1}{4}x^2 + k =$

$\displaystyle\frac{1}{4}x^2(2\,log(5x) - 1) + k$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 3 - x$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[0, 2]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) Le funzioni f e g sono continue e derivabili su tutto l'insieme dei numeri reali, quindi sono continue e derivabili nell'intervallo $[0, 2]$, $\forall x \in [0, 2]$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) = -1 \neq 0$. Il Teorema è applicabile. $f(0) = e^0 = 1$, $f(2) = e^2$, $g(0) = 3$, $g(2) = 1$ e $\dfrac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \dfrac{e^2 - 1}{1 - 3} = -\dfrac{e^2 - 1}{2}$. $f'(x) = e^x$ con $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -e^x$; posto $-e^x = -\dfrac{e^2 - 1}{2}$ si ottiene facilmente $x_0 = log\left(\dfrac{e^2 - 1}{2}\right) \approx 1.16$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x,\, y,\, z,\, w) = (w - z) \cdot \left(3x - zy^3\right)$.

8)

$$f'_x = (w - z) \cdot 3 = 3\,(w - z)\,;$$

$$f'_y = (w - z) \cdot \left(-3zy^2\right) = -3zy^2\,(w - z)\,;$$

$$f'_z = (-1) \cdot \left(3x - zy^3\right) + (w - z) \cdot \left(-y^3\right) = 2zy^3 - 3x - wy^3$$

$$f'_w = 3x - zy^3\,.$$