Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

10 gennaio 2025

Compito $\mathbb{G}1$[✓]

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| < e\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 5^{3+x} > 25\}$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $\mathcal{C}(A \cup B)$, ed i relativi insiemi di chiusura: $\overline{A \cap B}$ e $\overline{\mathcal{C}(A \cup B)}$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(kx)}{3x + x^2} = \dfrac{2}{3}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a + arctg\, x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} - x^2 & \text{se } 0 < x < 4 \\ b + 2^x & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$.

Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot sen\, x} - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^x$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}\left(1 - x^2\right)$.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int (2x \cdot log(x))\, dx$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = log(x)$ e $g(x) = 3x + 4$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[1, 2]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione: $f(x,\, y,\, z,\, w) = \dfrac{w^3 - 2z^2}{x + y}$.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

10 gennaio 2025

Compito $\mathbb{G}2$ ✓

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 2\pi\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^{1-x} \leq 27\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $\mathcal{C}(A \cap B)$, ed i relativi insiemi frontiera: $\delta(A \cup B)$ e $\delta(\mathcal{C}(A \cap B))$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1}{x^2 - 2x} = \dfrac{2}{3}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{2-x} & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 + 3x & \text{se } -2 < x < 2 \\ b - log_2 x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + arcsen\, x)^2 - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-3x}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}(x^2 - 4)$.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x \cdot log(3x))\, dx$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = log(x)$ e $g(x) = 2 - 3x$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[1, 3]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:

$$f(x,\, y,\, z,\, w) = \frac{x^3 - 2z}{w - y^3} .$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

10 gennaio 2025

Compito $\mathbb{G}3$✓

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq 2e\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 3^{3-x} < 81\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $\mathcal{C}(A \cap B)$, ed i relativi insiemi derivato: $\mathcal{D}(A \cup B)$ e $\mathcal{D}(\mathcal{C}(A \cap B))$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{3x^2 + kx} = \dfrac{1}{5}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq -1 \\ a - bx^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ log_2(2x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{tg\, x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{4x}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}\left(4 - x^2\right)$.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int (3x \cdot log(x))\, dx$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2 + x$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[0, 3]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:

$$f(x,\, y,\, z,\, w) = w - y^3 + \frac{5x^2}{z - y}.$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

10 gennaio 2025

Compito $\mathbb{G}4$✓

1) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| > e\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^{x+5} \leq 64\}$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $\mathcal{C}(A \cup B)$, ed i relativi insiemi interno: $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$ e $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}(A \cup B)}}$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

2) (6 punti) Determinare il valore del parametro reale k tale per cui $\lim_{x \to 0} \dfrac{log(1 - kx)}{x + 3x^2} = \dfrac{1}{5}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq -1 \\ a + bx^2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ arctg\, x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Determinare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme $\mathbb{R}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-3 \cdot tg\, x} - 1}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x}\right)^x$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}\left(x^2 - 9\right)$.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x \cdot log(5x))\, dx$.

7) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 3 - x$. Verificare che al rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è applicabile il Teorema di Cauchy nell'intervallo $[0, 2]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione: $f(x, y, z, w) = (w - z) \cdot \left(3x - zy^3\right)$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.