Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

4 febbraio 2025

Compito $\mathbb{F}1$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r; costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p\ o\ q) \Rightarrow non(non\, r \Leftrightarrow p)$.

1)

p	q	r	$non\, r$	$p\ o\ q$	$non\, r \Leftrightarrow p$	$non(non\, r \Leftrightarrow p)$	$(p\ o\ q) \Rightarrow non(non\, r \Leftrightarrow p)$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V

.

2) (6 punti) Determinare il Campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2+x}}$.

2) Per determinare il Campo d'esistenza della funzione f dobbiamo risolvere la disequazione $2 - \sqrt{2+x} \geq 0$ ovvero $\sqrt{2+x} \leq 2$ da cui $0 \leq 2+x \leq 4$ che porta a $-2 \leq x \leq 2$; $CE_f = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = 2 - x$ e sia $g(x)$ una funzione tale che $f(g(x)) = e^{-3x}$. Determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione della funzione composta $g(f(x) - 2)$.

3) Da $f(x) = 2 - x$ segue $f(g(x)) = 2 - g(x)$, posto $2 - g(x) = e^{-3x}$ si ottiene facilmente $g(x) = 2 - e^{-3x}$ da cui $g(f(x) - 2) = g((2-x) - 2) = g(-x) = 2 - e^{3x}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen\,x} - 1}{log(1-2x)}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen\,x} - 1}{log(1-2x)} = \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\frac{e^{sen\,x}-1}{sen\,x} \cdot \frac{sen\,x}{x}}{\frac{log(1-2x)}{-2x}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(\to 1) \cdot (\to 1)}{(\to 1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen\,x} - 1}{log(1-2x)} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen\,x} - 1}{log(1-2x)} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen\,x} \cdot cos\,x}{\frac{1}{1-2x} \cdot (-2)} = \dfrac{(\to 1) \cdot (\to 1)}{(\to 1) \cdot (-2)} = -\dfrac{1}{2}$.

Per il secondo limite notiamo che $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$, quindi per $x \to -\infty$ $e^{2x} = o(e^{-2x})$ e $e^{3x} = o(e^{-3x})$, ne consegue che $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{3x} + e^{-3x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{e^{-2x}}{e^{-3x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} -e^{x} = 0$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = log\left(\dfrac{1+3x^2}{2+x^2}\right)$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta due punti di flesso, uno di ascissa positiva ed uno di ascissa negativa.)

5) $C.E.$: $\dfrac{1+3x^2}{2+x^2} > 0$, vera per ogni x appartenente a $\mathbb{R}$ in quanto rapporto fra due quantità positive; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\dfrac{1+3(-x)^2}{2+(-x)^2}\right) = log\left(\dfrac{1+3x^2}{2+x^2}\right) = y(x)$.

Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $log\left(\dfrac{1+3x^2}{2+x^2}\right) \geq 0$ se $\dfrac{1+3x^2}{2+x^2} \geq 1 \Rightarrow$ $\dfrac{1+3x^2}{2+x^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2-1}{2+x^2} \geq 0$ ovvero $2x^2 - 1 \geq 0$ da cui $x^2 \geq \dfrac{1}{2}$ ed in conclusione $x \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$. Funzione negativa in $\left[0, \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right[$, positiva in $\left[\dfrac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty\right[$; punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$.

$y(0) = log\left(\dfrac{1}{2}\right) = -log\,2$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{1+3x^2}{2+x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+3\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x^2}+1\right)}\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{\frac{1}{x^2}+3}{\frac{2}{x^2}+1}\right) = log\left(\frac{(\to 3)}{(\to 1)}\right) = log\,3$$

. La funzione presenta asintoto orizzontale destro di equazione $y = log\,3$.

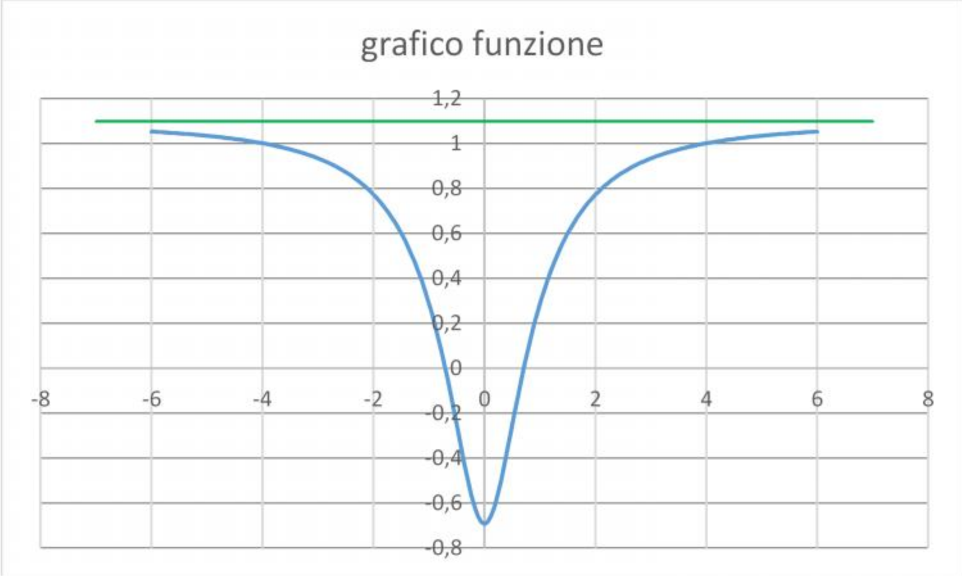
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{1+3x^2}{2+x^2}} \cdot \dfrac{6x(2+x^2) - 2x(1+3x^2)}{(2+x^2)^2} =$

$\dfrac{2+x^2}{1+3x^2} \cdot \dfrac{10x}{(2+x^2)^2} = \dfrac{10x}{(1+3x^2)(2+x^2)}$. $y' > 0$ per ogni $x > 0$. Funzione strettamente crescente in $[0, +\infty[$. Punto di minimo assoluto $x = 0$.

Concavità e convessità: l'esistenza di un unico punto di flesso di ascissa positiva insieme al minimo assoluto in $x = 0$ implica che la funzione è strettamente convessa nell'intervallo $[0, \alpha]$, strettamente concava nell'intervallo $[\alpha, +\infty[$.

Nota: tramite il calcolo della derivata seconda si determina l'ascissa del punto di flesso $\alpha = \dfrac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47$.

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_{-1}^{3}\left(3 - x^2 + \sqrt[3]{x^4}\right)\, dx$.

6) $\int_{-1}^{3}\left(3 - x^2 + \sqrt[3]{x^4}\right)\, dx \;=\; \int_{-1}^{3}\left(3 - x^2 + x^{\frac{4}{3}}\right)\, dx \;=\; \left(3x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)_{-1}^{3} \;=$
$\left(3x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}\right)_{-1}^{3} \;=\; \left(9 - 9 + \frac{27}{7}\sqrt[3]{3}\right) - \left(-3 + \frac{1}{3} - \frac{3}{7}\right) \;=$
$\frac{27}{7}\sqrt[3]{3} + \frac{65}{21} \;=\; \frac{65 + 81\sqrt[3]{3}}{21}$.

7) (8 punti) Sia data la funzione $f(x) = x + e^{2x}$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 3]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) La funzione f è continua e derivabile su tutto l'insieme dei numeri reali, quindi è continua e derivabile nell'intervallo $[0, 3]$ con $f'(x) = 1 + 2\,e^{2x}$. $f(3) = 3 + e^6$, $f(0) = 1$, e $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 + e^6 - 1}{3} = \frac{2 + e^6}{3}$. Posto $1 + 2\,e^{2x} = \frac{2 + e^6}{3}$ si ottiene $e^{2x} = \frac{e^6 - 1}{6}$, da cui facilmente $x_0 = \frac{1}{2}log\left(\frac{e^6 - 1}{6}\right) \approx 2.1$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie $z(x, y) = 6x \cdot cos\, y + x \cdot sen\, y$ nel punto di coordinate $P(-1, 0)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$.

$z(P) = -6 \cdot cos\, 0 - sen\, 0 = -6$,
$\nabla z = (6 \cdot cos\, y + sen\, y,\ -6x \cdot sen\, y + x \cdot cos\, y)$,
$\nabla z(P) = (6 \cdot cos\, 0 + sen\, 0, 6 \cdot sen\, 0 - cos\, 0) = (6,\ -1)$. Equazione del piano tangente: $z + 6 = (6,\ -1) \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$ da cui segue $z + 6 = 6(x + 1) - y$, oppure $6x - y - z = 0$.

Compito $\mathbb{F}2$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r; costruire la tavola di verità della proposizione composta $non(p \Rightarrow q)\ e\ (r \Leftrightarrow non\, q)$.

1)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$non\, q$	$non(p \Rightarrow q)$	$r \Leftrightarrow non\, q$	$non(p \Rightarrow q)\ e\ (r \Leftrightarrow non\, q)$
V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F

2) (6 punti) Determinare il Campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

2) Per determinare il Campo d'esistenza della funzione f dobbiamo risolvere la disequazione $1 - \sqrt{1 - x} \geq 0$ ovvero $\sqrt{1 - x} \leq 1$ da cui $0 \leq 1 - x \leq 1$ che porta a $0 \leq x \leq 1$; $CE_f = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = 1 + 2x$ e sia $g(x)$ una funzione tale che $f(g(x)) = e^x$. Determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione della funzione composta $g(1 - f(x))$.

3) Da $f(x) = 1 + 2x$ segue $f(g(x)) = 1 + 2g(x)$, posto $1 + 2g(x) = e^x$ si ottiene facilmente $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{2}$ da cui $g(1 - f(x)) = g(1 - (1 + 2x)) = g(-2x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{2}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2\, sen\, x)}{log(1 + x)}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^{-2x} - e^{2x}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2\, sen\, x)}{log(1 + x)} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \dfrac{\frac{tg(2\, sen\, x)}{2\, sen\, x} \cdot \frac{sen\, x}{x}}{\frac{log(1+x)}{x}} = 2 \cdot \dfrac{(\to 1) \cdot (\to 1)}{(\to 1)} = 2.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2\, sen\, x)}{log(1 + x)} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2\, sen\, x)}{log(1 + x)} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + tg^2(2\, sen\, x)) \cdot 2\, cos\, x}{\frac{1}{1+x}} = \dfrac{(\to 1) \cdot 2 \cdot (\to 1)}{(\to 1)} = 2.$

Per il secondo limite notiamo che $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$, quindi per $x \to -\infty$ $e^{3x} = o(e^{-3x})$ e $e^{2x} = o(e^{-2x})$, ne consegue che $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^{-2x} - e^{2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-3x}}{e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = log\left(\dfrac{2 + x^2}{1 + 3x^2}\right)$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta due punti di flesso, uno di ascissa positiva ed uno di ascissa negativa.)

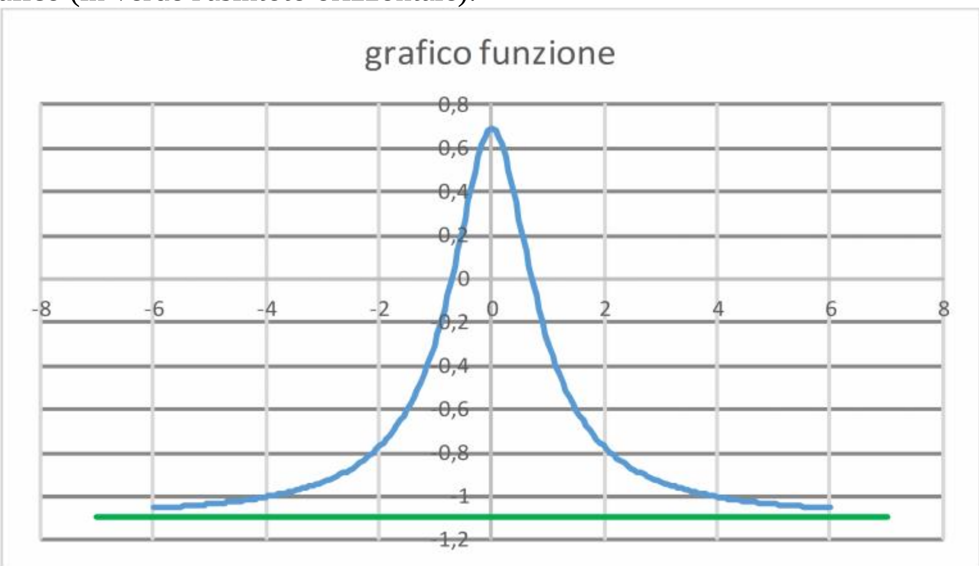
5) $C.E.$: $\dfrac{2 + x^2}{1 + 3x^2} > 0$, vera per ogni x appartenente a $\mathbb{R}$ in quanto rapporto fra due quantità positive; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\frac{2+(-x)^2}{1+3(-x)^2}\right) = log\left(\frac{2+x^2}{1+3x^2}\right) = y(x)$.
Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $log\left(\frac{2+x^2}{1+3x^2}\right) \geq 0$ se $\frac{2+x^2}{1+3x^2} \geq 1 \Rightarrow$ $\frac{2+x^2}{1+3x^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1-2x^2}{1+3x^2} \geq 0$ ovvero $1-2x^2 \geq 0$ da cui $x^2 \leq \frac{1}{2}$ ed in conclusione $x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Funzione positiva in $\left[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right[$, negativa in $\left]\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty\right[$; punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$.
$y(0) = log\,2$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{2+x^2}{1+3x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x^2}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+3\right)}\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{\frac{2}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+3}\right) = log\left(\frac{(\to 1)}{(\to 3)}\right) = log\left(\frac{1}{3}\right) = -log\,3.$$

La funzione presenta asintoto orizzontale destro di equazione $y = -log\,3$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{2+x^2}{1+3x^2}} \cdot \frac{2x(1+3x^2)-6x(2+x^2)}{(1+3x^2)^2} =$ $\frac{1+3x^2}{2+x^2} \cdot \frac{-10x}{(1+3x^2)^2} = \frac{-10x}{(2+x^2)(1+3x^2)}$. $y' < 0$ per ogni $x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0, +\infty[$. Punto di massimo assoluto $x = 0$.
Concavità e convessità: l'esistenza di un unico punto di flesso di ascissa positiva insieme al massimo assoluto in $x = 0$ implica che la funzione è strettamente concava nell'intervallo $[0, \alpha]$, strettamente convessa nell'intervallo $[\alpha, +\infty[$.
Nota: tramite il calcolo della derivata seconda si determina l'ascissa del punto di flesso $\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47$.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_{-2}^{1}\left(1+3x^2-\sqrt[5]{x^4}\right)\,dx$.

6) $\int_{-2}^{1}\left(1+3x^2-\sqrt[5]{x^4}\right)\,dx\;=\;\int_{-2}^{1}\left(1+3x^2-x^{\frac{4}{5}}\right)\,dx\;=\;\left(x+x^3-\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}}\right)_{-2}^{1}\;=$
$\left(x+x^3-\frac{5}{9}x\sqrt[5]{x^4}\right)_{-2}^{1}\;=\;\left(1+1-\frac{5}{9}\right)-\left(-2-8+\frac{10}{9}\sqrt[5]{16}\right)\;=$
$\frac{13}{9}+10-\frac{10}{9}\sqrt[5]{16}\;=\;\frac{103-10\sqrt[5]{16}}{9}$.

7) (8 punti) Sia data la funzione $f(x)=e^x-3x$. Verificare che a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$, e determinare il valore del punto x_0 che soddisfa il Teorema.

7) La funzione f è continua e derivabile su tutto l'insieme dei numeri reali, quindi è continua e derivabile nell'intervallo $[0,2]$ con $f'(x)=e^x-3$. $f(2)=e^2-6$, $f(0)=1$, e $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{e^2-6-1}{2}=\frac{e^2-7}{2}$. Posto $e^x-3=\frac{e^2-7}{2}$ si ottiene $e^x=\frac{e^2-1}{2}$, da cui facilmente $x_0=log\left(\frac{e^2-1}{2}\right)\approx 1.16$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie $z(x,y)=x\cdot cos\,y-5x\cdot sen\,y$ nel punto di coordinate $P(1,0)$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z-z(P)=\nabla z(P)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$.

$z(P)=cos\,0-5\cdot sen\,0=1$, $\nabla z=(cos\,y-5\cdot sen\,y,\,-x\cdot sen\,y-5x\cdot cos\,y)$, $\nabla z(P)=(cos\,0-5\cdot sen\,0,\,-sen\,0-5\cdot cos\,0)=(1,\,-5)$. Equazione del piano tangente: $z-1=(1,\,-5)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$ da cui segue $z-1=x-1-5y$, oppure $x-5y-z=0$.