Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

20 marzo 2025

Compito Unico

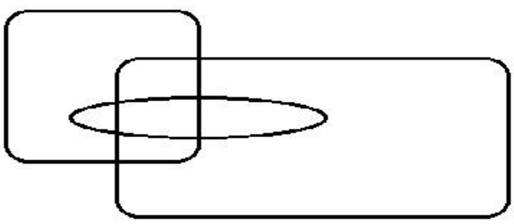
1) (6 punti) Siano dati tre insiemi A, B e C tali per cui vale che $B \subseteq (A \cup C)$ e $C \subseteq (A \cup B)$. Si può concludere con certezza che $(B \cap C) \subseteq A$? (Giustificare la risposta)

1) (*Primo Metodo - Con la Tavola di Appartenenza*):

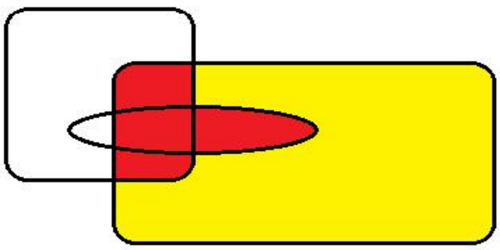
A	B	C	$A \cup C$	$A \cup B$	$B \cap C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\notin}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\boldsymbol{\in}$
$\notin$	$\boldsymbol{\in}$	$\notin$	$\boldsymbol{\notin}$		
$\notin$	$\notin$	$\boldsymbol{\in}$	$\in$	$\boldsymbol{\notin}$	
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

La condizione $B \subseteq (A \cup C)$ non è rispettata nelle riga sesta (in neretto), che quindi non viene considerata nella tavola; la condizione $C \subseteq (A \cup B)$ non è rispettata nelle riga settima (in neretto), anche questa riga non viene considerata nella tavola; nelle restanti sei righe si osserva che nella quinta riga un elemento può appartenere a $B \cap C$ e non appartenere all'insieme A (in neretto), quindi non possiamo concludere con certezza che $(B \cap C) \subseteq A$.

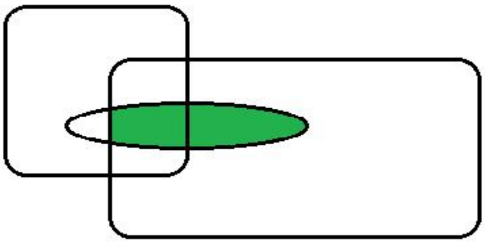
(*Secondo Metodo - Con i Diagrammi di Eulero-Venn)*: se $B \subseteq (A \cup C)$, gli insiemi si presentano come nel diagramma seguente, con A l'insieme dalla forma quadrata, B l'insieme dalla forma ovale e C l'insieme dalla forma rettangolare.



Se $C \subseteq (A \cup B)$, la parte in giallo del diagramma seguente risulta essere vuota e quindi l'insieme C deve necessariamente essere solo la parte in rosso del diagramma.



Infine dal predente diagramma si osserva che l'insieme $B \cap C$, la parte in verde del diagrama che segue, non è necessariamente contenuta nell'insieme A.



(*Terzo Metodo - Con il Ragionamento Logico)*: se $B \subseteq (A \cup C)$ ogni elemento di B è elemento di A oppure di C e se $C \subseteq (A \cup B)$ ogni elemento di C è elemento di A oppure di B, quindi se $B \cap C$ è insieme non vuoto, ogni elemento di $B \cap C$ è elemento di A oppure di B e C, ma ciò non implica automaticamente che sia elemento di A; ad esempio per i tre insiemi può verificarsi che $A \subset B = C$, in questo caso $B \subseteq (A \cup C)$ e $C \subseteq (A \cup B)$ ma $(B \cap C) \nsubseteq A$.

2) (8 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx}$. Sapendo che essa presenta un asintoto obliquo di equazione $y = x$ ed ha punto di intersezione con l'asse delle ascisse in $(1, 0)$; determinare i valori dei parametri a, b e c.

2) Se la funzione presenta asintoto obliquo di equazione $y = x$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + ax + b}{cx} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{(1-c)x^2 + ax + b}{cx} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1-c}{c} x + \frac{a}{c} + \frac{b}{cx} \right) = 0$$, da cui $c = 1$ e $a = 0$; se la funzione presenta punto di intersezione con l'asse delle ascisse in $(1, 0)$, $\dfrac{1 + a + b}{c} = 1 + b = 0$, da cui $b = -1$.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 1$; determinare le espressioni delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e risolvere la disequazione $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$.

3) $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$;
$g(f(x)) = g(x^2 - 2) = (x^2 - 2) + 1 = x^2 - 1$; $f(g(x)) + g(f(x)) = 2x^2 + 2x - 2$, posto $2x^2 + 2x - 2 \leq 10$ si ottiene la disequazione equivalente $x^2 + x - 6 \leq 0$ che risolta ha come soluzione $-3 \leq x \leq 2$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot (\to 1) = 3.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} \cdot 3}{1} = (\to 1) \cdot 3 = 3.$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x} = e$ in quanto $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e quindi

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} = e.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione
$y = x^3 - 6x$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$, la funzione è un polinomio.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x = -y(x)$.

Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $x^3 - 6x \geq 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6\right) \geq 0$, vera se $x^2 \geq 6 \Rightarrow x \geq \sqrt{6}$. Funzione negativa in $\left]0, \sqrt{6}\right[$, positiva in $\left]\sqrt{6}, +\infty\right[$; punto di intersezione con l'asse delle ascisse $A\left(\sqrt{6}, 0\right)$. $y(0) = 0$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

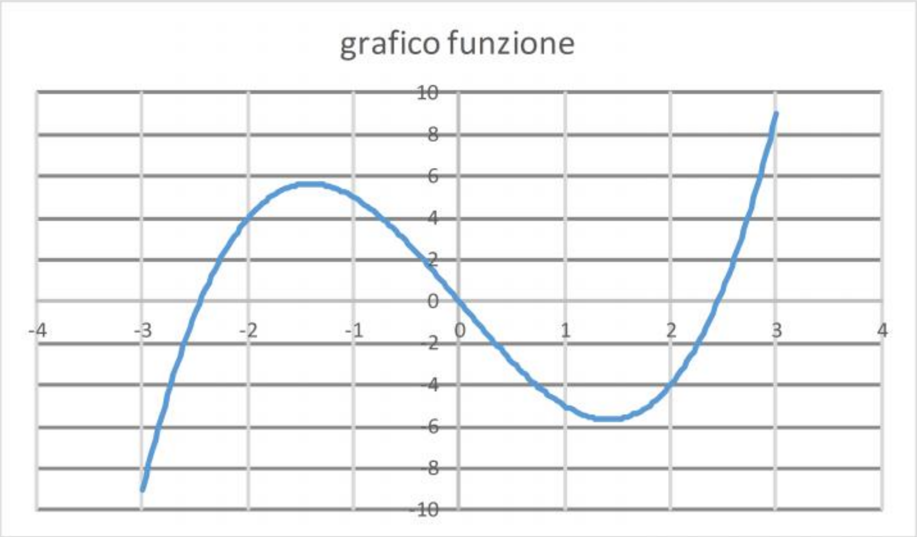
$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 6x = \lim_{x \to +\infty} x\left(x^2 - 6\right) = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 6 = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 3x^2 - 6$. $y' > 0$ se $x^2 > 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$. Funzione strettamente decrescente in $\left[0, \sqrt{2}\right]$, strettamente crescente in $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$. Punto di minimo relativo $x = \sqrt{2}$, con $y\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \approx -5.66$.

Concavità e convessità: $y'' = 6x$. $y'' > 0$ per ogni $x \in \left]0, +\infty\right[$, nell'origine degli assi la funzione presenta un punto di flesso ascndente.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx$.

6) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx = \left(\frac{1}{2} \cdot log\left(1 + e^{2x}\right)\right)_0^1 =$

$\frac{1}{2} \cdot log\left(1 + e^2\right) - \frac{1}{2} \cdot log\, 2 = \frac{1}{2} \cdot log\left(\frac{1 + e^2}{2}\right) = log\sqrt{\frac{1 + e^2}{2}}$.

7) (6 punti) Siano date le matrici $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; determinare una matrice $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ tale per cui valga l'uguaglianza: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}^T \cdot \mathbb{B}$.

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix}$,
$\mathbb{X}^T \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 & 3x_1 + 3x_3 \\ 3x_2 & 3x_2 + 3x_4 \end{bmatrix}$. Posto
$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 & 3x_1 + 3x_3 \\ 3x_2 & 3x_2 + 3x_4 \end{bmatrix}$ si ha $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

8) (8 punti) Si studi la natura dei punti critici della funzione
$f(x, y) = y^2 + xy^2 + x^2 - 14x$.

8) $\nabla f = (y^2 + 2x - 14, 2y + 2xy)$.

$$FOC\text{: } \begin{cases} y^2 + 2x - 14 = 0 \\ 2y + 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2x - 14 = 0 \\ 2y(1 + x) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow & \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \\ \searrow & \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 4 \end{cases} \end{matrix}$$; tre punti

critici $P_1(7, 0)$ e $P_{2,3}(-1, \pm 4)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2 + 2x \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 2(2 + 2x) - (2y)^2 = 4(1 + x - y^2)$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 32 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = 2 > 0$. P_1 punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_{2,3})| = -64 < 0$. $P_{2,3}$ punti di sella.