

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

20 marzo 2025

Compito Unico[✓]

- 1) (6 punti) Siano dati tre insiemi A , B e C tali per cui vale che $B \subseteq (A \cup C)$ e $C \subseteq (A \cup B)$. Si può concludere con certezza che $(B \cap C) \subseteq A$? (Giustificare la risposta)
- 2) (8 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \frac{x^2 + ax + b}{cx}$. Sapendo che essa presenta un asintoto obliquo di equazione $y = x$ ed ha punto di intersezione con l'asse delle ascisse in $(1, 0)$; determinare i valori dei parametri a , b e c .
- 3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 1$; determinare le espressioni delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e risolvere la disequazione $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = x^3 - 6x$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$.
- 7) (6 punti) Siano date le matrici $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;
determinare una matrice $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ tale per cui valga l'uguaglianza: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}^T \cdot \mathbb{B}$.
- 8) (8 punti) Si studi la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = y^2 + xy^2 + x^2 - 14x$.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.