

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2023-24)

20 marzo 2025

Compito Unico<sup>✓</sup>

- 1) (6 punti) Siano dati tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  tali per cui vale che  $B \subseteq (A \cup C)$  e  $C \subseteq (A \cup B)$ . Si può concludere con certezza che  $(B \cap C) \subseteq A$ ? (Giustificare la risposta)
- 2) (8 punti) Sia data la funzione di equazione  $y = \frac{x^2 + ax + b}{cx}$ . Sapendo che essa presenta un asintoto obliquo di equazione  $y = x$  ed ha punto di intersezione con l'asse delle ascisse in  $(1, 0)$ ; determinare i valori dei parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
- 3) (6 punti) Siano date le funzioni  $f(x) = x^2 - 2$  e  $g(x) = x + 1$ ; determinare le espressioni delle funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$  e risolvere la disequazione  $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione  $y = x^3 - 6x$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$ .
- 7) (6 punti) Siano date le matrici  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ;  
determinare una matrice  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$  tale per cui valga l'uguaglianza:  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}^T \cdot \mathbb{B}$ .
- 8) (8 punti) Si studi la natura dei punti critici della funzione  $f(x, y) = y^2 + xy^2 + x^2 - 14x$ .

---

<sup>✓</sup> Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.