Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

6 giugno 2025

Compito $\mathbb{G}5$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r; costruire la tavola di verità della proposizione composta $non(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow non(p\ o\ q)$.

1)

p	q	r	$r \Rightarrow p$	$p\ o\ q$	$non(r \Rightarrow p)$	$non(p\ o\ q)$	$non(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow non(p\ o\ q)$
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	F

.

$NOTA\ A\ MARGINE$: per una doppia applicazione della legge di contrapposizione, la proposizione composta $non(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow non(p\ o\ q)$ e equivalente alla proposizione $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p\ o\ q)$, pertanto la tavola di verità della proposizione proposta può essere riassunta in maniera sintetica come:

p	q	r	$r \Rightarrow p$	$p\ o\ q$	$(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p\ o\ q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F

.

2) (6 punti) Sia data la funzione f dipendente dai parametri k e m e con espressione $f(x) = \dfrac{3+kx^2}{m-x^2}$. Determinare i valori dei parametri k e m sapendo che $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$.

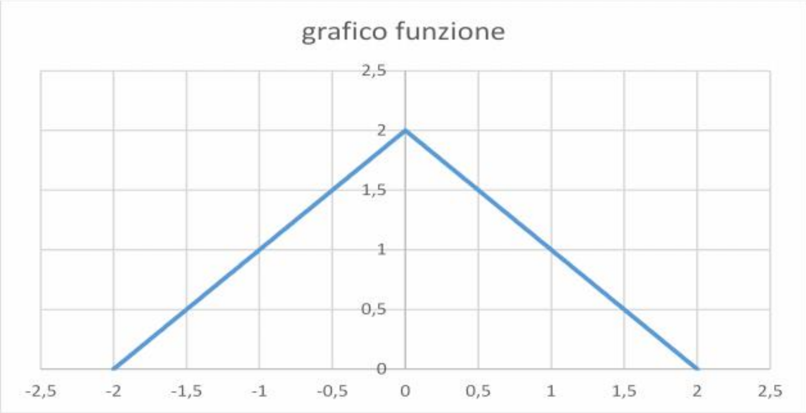
2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3+kx^2}{m-x^2} = \dfrac{3}{m}$;

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3+kx^2}{m-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2}+k\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{m}{x^2}-1\right)} = \frac{(\to k)}{(\to -1)} = -k.$$

Posto $\dfrac{3}{m} = 1$ e $-k = -1$ si ottiene facilmente $k = 1$ e $m = 3$.

3) (6 punti) Sia f una funzione con dominio $[-2, 2]$, codominio $[0, 2]$ ed espressione $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ 2-x & \text{se } 0 < x \le 2 \end{cases}$. Disegnare il grafico della funzione e calcolare gli insiemi $f([-1,1])$ e $f^{-1}([0,1])$, rispettivamente immagine dell'insieme $[-1,1]$ e controimmagine dell'insieme $[0,1]$.

3) Di seguito il grafico della funzione proposta.



Dal grafico della funzione si evince facilmente che l'insieme $f([-1,1]) = [1,2]$, mentre l'insieme $f^{-1}([0,1]) = [-2,-1] \cup [1,2]$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} log\left(\frac{sen\,x}{x+x^2}\right)$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + cos\,x}$.

4) $\lim_{x \to 0} log\left(\frac{sen\,x}{x+x^2}\right) = \lim_{x \to 0} log\left(\frac{sen\,x}{x} \cdot \frac{1}{1+x}\right) = log((\to 1) \cdot (\to 1)) = log\,1 = 0.$

Per il secondo limite notiamo che per x tendente a $+\infty$, x e $cos\,x$ sono entrambi $o(e^x)$, quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + cos\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - o(e^x)}{e^x + o(e^x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

5) $C.E.$: $1 + e^{-x} \neq 0$, vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto somma di quantità positive. $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1}{1+e^{-(-x)}} = \frac{1}{1+e^x}$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0\, \forall x \in C.E.$ in quanto rapporto di quantità positive. $y(0) = \frac{1}{2}$; punto di intersezione con l'asse delle ordinate $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{(\to+\infty)}} = \frac{1}{(\to +\infty)} = 0$. $AsOrSx$ di equazione $y = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{(\to-\infty)}} = \frac{1}{(\to 1)} = 1$. $AsOrDx$ di equazione $y = 1$.

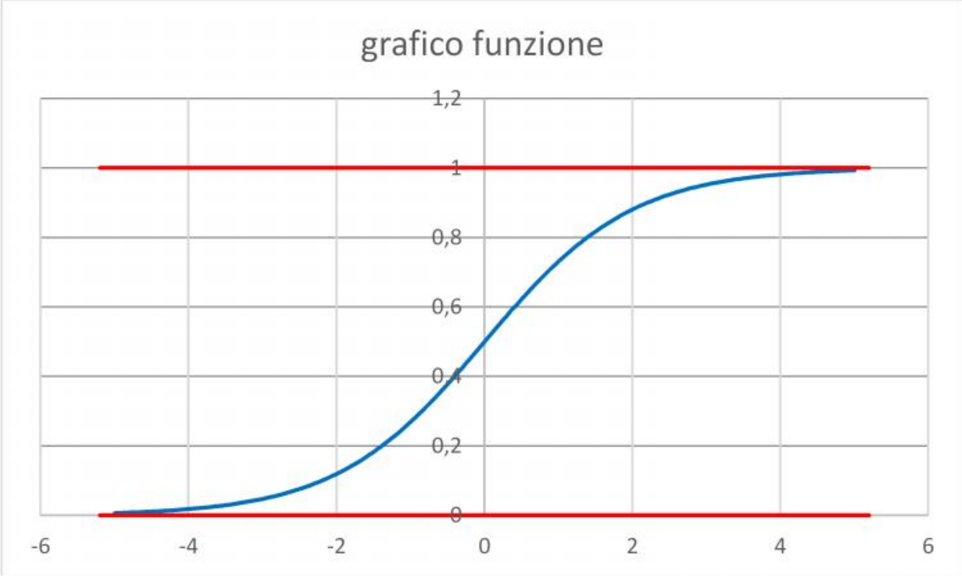
Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. $y' > 0\, \forall x \in C.E.$ in quanto rapporto di quantità positive. Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{-e^{-x} \cdot (1+e^{-x})^2 - e^{-x} \cdot 2 \cdot (1+e^{-x}) \cdot (-e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} =$$

$\dfrac{-e^{-x}\cdot(1+e^{-x})((1+e^{-x})-2e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} = -\dfrac{e^{-x}\cdot(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$. $y''>0$ se $1-e^{-x}<0 \Leftrightarrow e^{-x}>1 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty,0]$, strettamente concava in $[0,+\infty[$. Punto di flesso $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Grafico (in rosso i due asintoti orizzontali):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{x}{3+x^2}\right)dx$.

6) $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{x}{3+x^2}\right)dx = \int_1^2\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{3+x^2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}log(3+x^2)\right)_1^2 = \frac{1}{2}log\,7-\frac{1}{2}log\,4 = log\sqrt{\frac{7}{4}} \approx 0.28.$

7) (8 punti) Siano date le due funzioni di equazioni $y=e^{4x}-1$ e $y=e^{2x}$. Per un unico valore in ascissa x_0 le due funzioni presentano rette tangenti parallele. Determinare tale valore x_0 ed in tale punto determinare le equazioni delle rette tangenti alle funzioni.

7) Le rette tangenti alle funzioni sono parallele se e solo se le due funzioni presentano nel punto x_0 derivate uguali. Calcoliamo le due derivate, per la prima funzione vale $y'=4e^{4x}$ mentre per la seconda abbiamo $y'=2e^{2x}$; posto $4e^{4x}=2e^{2x}$ otteniamo $e^{2x}=\dfrac{1}{2}$ da cui $2x=log\dfrac{1}{2}=-log\,2$ ed infine $x=-\dfrac{1}{2}log\,2=-log\sqrt{2}$; $x_0=-log\sqrt{2}$ con entrambe le derivate nel punto x_0 pari a 1. Per la prima funzione abbiamo $y(x_0)=e^{4\left(-log\sqrt{2}\right)}-1=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}$, con retta tangente di equazione $y+\dfrac{3}{4}=1\cdot\left(x+log\sqrt{2}\right)$ ovvero $y=x+log\sqrt{2}-\dfrac{3}{4}$; mentre per la seconda funzione $y(x_0)=e^{2\left(-log\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$, con retta tangente di equazione $y-\dfrac{1}{2}=1\cdot\left(x+log\sqrt{2}\right)$ ovvero $y=x+log\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y)=2x^3-y^2-12x+8y-9$.

8) $\nabla f=(6x^2-12,\ -2y+8)$.

FOC: $\begin{cases} 6x^2 - 12 = 0 \\ -2y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 4 \end{cases}$; due punti critici $P_{1,2}\left(\pm\sqrt{2}, 4\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 12x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -24x$.

SOC: $|\mathcal{H}f(\sqrt{2}, 4)| = -24\sqrt{2} < 0$. P_1 punto di sella.

$|\mathcal{H}f(-\sqrt{2}, 4)| = 24\sqrt{2} > 0$; $f''_{yy}(-\sqrt{2}, 4) = -2 < 0$. P_2 punto di massimo.