

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

6 giugno 2025

Compito G5✓

- 1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p , q e r ; costruire la tavola di verità della proposizione composta $\text{non}(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow \text{non}(p \circ q)$.
- 2) (6 punti) Sia data la funzione f dipendente dai parametri k e m e con espressione $f(x) = \frac{3 + kx^2}{m - x^2}$. Determinare i valori dei parametri k e m sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$.
- 3) (6 punti) Sia f una funzione con dominio $[-2, 2]$, codominio $[0, 2]$ ed espressione $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$. Disegnare il grafico della funzione e calcolare gli insiemi $f([-1, 1])$ e $f^{-1}([0, 1])$, rispettivamente immagine dell'insieme $[-1, 1]$ e controimmagine dell'insieme $[0, 1]$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{\text{sen } x}{x + x^2}\right)$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + \cos x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.
- 6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 \left(\frac{x}{3 + x^2}\right) dx$.
- 7) (8 punti) Siano date le due funzioni di equazioni $y = e^{4x} - 1$ e $y = e^{2x}$. Per un unico valore in ascissa x_0 le due funzioni presentano rette tangenti parallele. Determinare tale valore x_0 ed in tale punto determinare le equazioni delle rette tangenti alle funzioni.
- 8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = 2x^3 - y^2 - 12x + 8y - 9$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.