

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

4 luglio 2025

Compito L1

- 1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q ed indichiamo con r_1 la proposizione composta $r_1: p \Leftrightarrow q$, e con r_2 la proposizione composta $r_2: p \vee q$. Determinare un connettivo logico $*$ in modo che la proposizione $r_1 * r_2$ risulti una tautologia.

- 1) Costruiamo di seguito la tavola di verità con colonne relative ai quattro connettivi logici da valutare: congiunzione ($\wedge$), disgiunzione ($\vee$), implicazione ($\Rightarrow$) ed equivalenza ($\Leftrightarrow$).

p	q	r_1	r_2	$r_1 \wedge r_2$	$r_1 \vee r_2$	$r_1 \Rightarrow r_2$	$r_1 \Leftrightarrow r_2$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F

Come è facile notare dalla tavola costruita (colonna in neretto), l'unico connettivo logico $*$ tale per cui $r_1 * r_2$ risulti una tautologia è il connettivo della disgiunzione.

- 2) (6 punti) Si consideri la funzione a valori reali di espressione

$$f(x) = \begin{cases} -5 + x & \text{per } x \leq a \\ 2 + 3x & \text{per } a < x < b, \text{ dove } a \text{ e } b \text{ sono due parametri reali con } a < b. \\ -1 + 6x & \text{per } b \leq x \end{cases}$$

Indicare i valori dei due parametri che rendono la funzione continua in tutto l'insieme dei numeri reali.

- 2) La funzione proposta è continua in tutto l'insieme dei numeri reali se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x), \text{ ma}$$

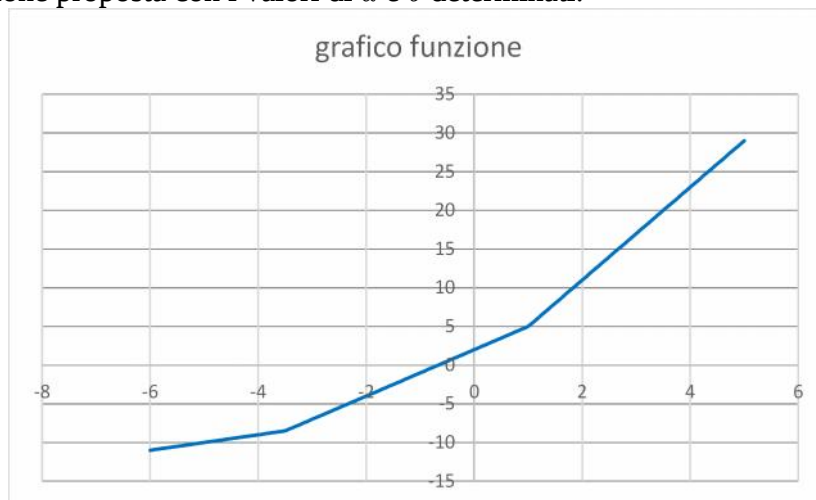
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} -5 + x = -5 + a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 2 + 3x = 2 + 3a; \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} 2 + 3x = 2 + 3b \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} -1 + 6x = -1 + 6b. \text{ Posto } -5 + a = 2 + 3a \text{ e}$$

$$2 + 3b = -1 + 6b \text{ si ottiene facilmente } a = -\frac{7}{2} \text{ e } b = 1. \text{ Di seguito il grafico}$$

della funzione proposta con i valori di a e b determinati.



- 3) (8 punti) Sia date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = 2 + e^x$. Determinare l'espressione della funzione composta $f(g(x))$ e di questa studiare poi dove risulti invertibile e determinare l'espressione della sua inversa.

3) $f(g(x)) = f(2 + e^x) = \frac{2 + e^x + 1}{2 + e^x} = \frac{3 + e^x}{2 + e^x}$. La funzione $f(g(x))$ è definita

$\forall x \in \mathbb{R}$ con derivata pari a $y' = \frac{e^x(2 + e^x) - (3 + e^x)e^x}{(2 + e^x)^2} =$

$\frac{2e^x + e^{2x} - 3e^x - e^{2x}}{(2 + e^x)^2} = -\frac{e^x}{(2 + e^x)^2}$; la derivata della funzione risulta negativa

$\forall x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione $f(g(x))$ è strettamente monotona decrescente su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e di conseguenza ivi invertibile. Per determinare l'espressione della funzione inversa ricaviamo x dalla seguente equazione: $y = \frac{3 + e^x}{2 + e^x}$ ovvero

$y(2 + e^x) = 3 + e^x$ da cui $e^x(y - 1) = 3 - 2y$ con $e^x = \frac{3 - 2y}{y - 1}$ ed in

conclusione $x = \log\left(\frac{3 - 2y}{y - 1}\right)$. Espressione della funzione inversa

$y = \log\left(\frac{3 - 2x}{x - 1}\right)$.

- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\log(1 + x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 + x}{2 + x}\right)^{2+x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\log(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} 9 \cdot \frac{\frac{1 - \cos(3x)}{9x^2}}{\frac{\log(1 + x^2)}{x^2}} = 9 \cdot \frac{(\rightarrow \frac{1}{2})}{(\rightarrow 1)} = \frac{9}{2}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\log(1 + x^2)} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\log(1 + x^2)} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cdot 3}{\frac{2x}{1 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(3x) \cdot (1 + x^2)}{2x} =$

$\frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo nuovamente il Teorema: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(3x) \cdot (1 + x^2)}{2x} \xrightarrow{H}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x) \cdot 3 \cdot (1 + x^2) + 3 \sin(3x) \cdot 2x}{2} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos(3x) \cdot (1 + x^2) + 6 \sin(3x) \cdot x}{2} =$

$\frac{9 \cdot (\rightarrow 1) \cdot (\rightarrow 1) + 6 \cdot (\rightarrow 0) \cdot (\rightarrow 0)}{2} = \frac{9}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 + x}{2 + x}\right)^{2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2 + x}\right)^{2+x} = e^2$.

- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$y = x^2 \cdot e^{-x}$.

- 5) C.E.: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^x$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0 \forall x \in C.E.$ in quanto prodotto fra una quantità non negativa x^2 ed una quantità positiva e^{-x} ; $y(0) = 0$, unico punto di intersezione con gli assi l'origine $O(0, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = (\rightarrow +\infty) \cdot (\rightarrow +\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = (\rightarrow -\infty) \cdot (\rightarrow +\infty) = -\infty; \text{ sul semiasse sinistro delle ascisse la funzione non presenta asintoti.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = (\rightarrow +\infty) \cdot (\rightarrow 0) \text{ FI. Per } x \rightarrow +\infty \ x^2 = o(e^x) \text{ quindi}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(e^x)}{e^x} = 0. \text{ AsOrd } x \text{ di equazione } y = 0.$$

Il limite per $x \rightarrow +\infty$ può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow +\infty)} \text{ FI. Applichiamo}$

$$\text{il Teorema: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow +\infty)} \text{ FI. Applichiamo}$$

$$\text{nuovamente il Teorema: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{(\rightarrow +\infty)} = 0.$$

Crescenza e decrescenza: $y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x(2-x)e^{-x}$. $y' > 0$ se $x(2-x) > 0$, vera per $0 < x < 2$; funzione strettamente crescente in $[0, 2]$, strettamente decrescente in $] -\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$; punto di minimo assoluto $O(0, 0)$, punto di massimo relativo $M(2, 4e^{-2})$.

Concavità e convessità:

$$y'' = 1 \cdot (2-x)e^{-x} + x \cdot (-1)e^{-x} + x(2-x)e^{-x} \cdot (-1) = (2-4x+x^2)e^{-x}. y'' > 0 \text{ se } 2-4x+x^2 > 0; \text{ risolviamo la disequazione di secondo grado calcolando innanzitutto il suo discriminante:}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8 > 0, \text{ calcoliamo adesso le due radici associate:}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = 2 - \sqrt{2} \\ \searrow x_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases};$$

$2-4x+x^2 > 0$ se $x < 2 - \sqrt{2} \vee x > 2 + \sqrt{2}$. Funzione strettamente convessa in $] -\infty, 2 - \sqrt{2}]$ e in $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$, strettamente concava in $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$.

$$\text{Punti di flesso } F_1 \left(2 - \sqrt{2}, \left(2 - \sqrt{2} \right)^2 \cdot e^{-(2-\sqrt{2})} \right) \text{ e}$$

$$F_2 \left(2 + \sqrt{2}, \left(2 + \sqrt{2} \right)^2 \cdot e^{-(2+\sqrt{2})} \right).$$

Grafico (in rosso l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^2 \left(\frac{e^x}{5 + e^x} \right) dx$.

$$6) \int_0^2 \left(\frac{e^x}{5 + e^x} \right) dx = (\log(5 + e^x))_0^2 = \log(5 + e^2) - \log 6 = \log\left(\frac{5 + e^2}{6}\right) \approx 0.73.$$

7) (6 punti) Siano date le due funzioni di equazioni $y = e^{2x} + c$ e $y = 2e^{x+1}$. Per un unico valore in ascissa x_0 le due funzioni presentano rette tangenti parallele. Determinare tale valore x_0 ed in tale punto determinare il valore del parametro c per il quale le due rette tangenti risultano coincidenti.

7) Le rette tangenti alle funzioni sono parallele se e solo se le due funzioni presentano nel punto x_0 derivate uguali. Calcoliamo le due derivate, per la prima funzione vale $y' = 2e^{2x}$ mentre per la seconda abbiamo $y' = 2e^{x+1}$; posto $2e^{2x} = 2e^{x+1}$ otteniamo $e^{2x} = e^{x+1}$ da cui $2x = x + 1$ ed infine $x = 1$; $x_0 = 1$ con entrambe le derivate nel punto x_0 pari a $2e^2$. Per risolvere la seconda parte dell'esercizio dobbiamo imporre che nel punto $x_0 = 1$ le due funzioni presentino ugual valore, per la prima funzione abbiamo $y(x_0) = e^2 + c$ mentre per la seconda $y(x_0) = 2e^2$, posto $e^2 + c = 2e^2$ si ottiene facilmente $c = e^2$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + xy^2 + xy$.

$$8) \nabla f = (2x + y^2 + y, 2xy + x).$$

$$FOC: \begin{cases} 2x + y^2 + y = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y^2 + y = 0 \\ x(2y + 1) = 0 \end{cases}; \text{ se } x = 0 \text{ otteniamo } y^2 + y = 0$$

da cui $y(y + 1) = 0$ con soluzioni $y = 0$ e $y = -1$, due punti critici $P_1(0, 0)$ e $P_2(0, -1)$; se $2y + 1 = 0$ ovvero $y = -\frac{1}{2}$ otteniamo

$$2x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ da cui } 2x - \frac{1}{4} = 0 \text{ ed infine } x = \frac{1}{8}, \text{ un punto}$$

critico $P_3\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 2y+1 \\ 2y+1 & 2x \end{bmatrix}; |\mathcal{H}f| = 4x - (2y+1)^2.$$

SOC: $|\mathcal{H}f(P_{1,2})| = -1 < 0$. P_1 e P_2 punti di sella.

$$|\mathcal{H}f(P_3)| = \frac{1}{2} > 0; f''_{xx}(P_3) = 2 > 0. P_3 \text{ punto di minimo.}$$