

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

4 luglio 2025

Compito $\mathbb{L}1$ ✓

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q ed indichiamo con r_1 la proposizione composta $r_1: p \Leftrightarrow q$, e con r_2 la proposizione composta $r_2: p \vee q$. Determinare un connettivo logico $*$ in modo che la proposizione $r_1 * r_2$ risulti una tautologia.

2) (6 punti) Si consideri la funzione a valori reali di espressione

$$f(x) = \begin{cases} -5 + x & \text{per } x \leq a \\ 2 + 3x & \text{per } a < x < b, \text{ dove } a \text{ e } b \text{ sono due parametri} \\ -1 + 6x & \text{per } b \leq x \end{cases}$$

reali con $a < b$. Indicare i valori dei due parametri che rendono la funzione continua in tutto l'insieme dei numeri reali.

3) (8 punti) Sia date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = 2 + e^x$.

Determinare l'espressione della funzione composta $f(g(x))$ e di questa studiare poi dove risulti invertibile e determinare l'espressione della sua inversa.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\log(1 + x^2)}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4+x}{2+x} \right)^{2+x}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^2 \left(\frac{e^x}{5 + e^x} \right) dx$.

7) (6 punti) Siano date le due funzioni di equazioni $y = e^{2x} + c$ e $y = 2e^{x+1}$. Per un unico valore in ascissa x_0 le due funzioni presentano rette tangenti parallele. Determinare tale valore x_0 ed in tale punto determinare il valore del parametro c per il quale le due rette tangenti risultano coincidenti.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 + xy.$$

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.