Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)
1 Settembre 2025

Compito $\mathbb{S}1$

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q; verificare se la proposizione composta $\big((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q\big) \Rightarrow \big(p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big)$ risulta una tautologia.

1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\big((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q\big) \Rightarrow \big(p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V

Come si evince dall'ultima colonna della tabella di verità, la proposizione proposta non è una tautologia.

2) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + 3x \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon \sqrt{x+2} > 1\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ ed i rispettivi insiemi di frontiera: $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + 3x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x(x+3) \leq 0\} =$
$\{x \in \mathbb{R}\colon -3 \leq x \leq 0\} = [-3, 0]$; $B = \{x \in \mathbb{R}\colon \sqrt{x+2} > 1\} =$
$\{x \in \mathbb{R}\colon x + 2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x > -1\} =]-1, +\infty[$.
$A \cup B = [-3, 0] \cup]-1, +\infty[= [-3, +\infty[$; $\delta(A \cup B) = \{-3\}$.
$A \cap B = [-3, 0] \cap]-1, +\infty[=]-1, 0]$; $\delta(A \cap B) = \{-1, 0\}$-

3) (8 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^x$ e sia $F(x) = f(2 - f(x))$. Determinare l'espressione della funzione $F(x)$, il suo Campo di Esistenza e l'espressione della sua funzione inversa.

3) $F(x) = f(2 - f(x)) = f(2 - e^x) = e^{2-e^x}$. La funzione $F(x)$ non presenta particolari condizioni per determinare il suo Campo di Esistenza, quindi il Campo di Esistenza è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Per determinare l'espressione della sua funzione inversa, posto $e^{2-e^x} = y$ si ottiene $2 - e^x = log\, y$ da cui $e^x = 2 - log\, y$ ed in conclusione $x = log(2 - log\, y)$; espressione della funzione inversa: $F^{-1}(x) = log(2 - log\, x)$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{sen^2\, x}$; $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+4x}{4+2x}\right)^{1+x}$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{sen^2\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - cos\, x}{x^2}}{\left(\frac{sen\, x}{x}\right)^2} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right)}{(\to 1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{sen^2\, x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{sen^2\, x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2\, sen\, x \cdot cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\, cos\, x} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+4x}{4+2x}\right)^{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{2}{x} + 4}{\frac{4}{x} + 2}\right)^{1+x} = (\to 2)^{(\to +\infty)} = +\infty.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

5) $C.E.$: $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$ in quanto rapporto fra quantità positive, $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\dfrac{1}{1+(-x)^2}\right) = log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = y(x)$.

Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) > 0$ se $\dfrac{1}{1+x^2} > 1 \Rightarrow$ $1+x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 0$, mai verificata. Funzione non positiva in tutto il suo $C.E.$; $y(0) = log(1) = 0$. Unico punto di intersezione con gli assi, l'origine degli stessi $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = log\left(\frac{1}{(\to +\infty)}\right) = log(\to 0) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{log\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + log\, x^2 - log\, x^2}{x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - 2\, log\, x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{o(x)}{x} = 0.$$ La funzione non presenta asintoti.

Il precedente limite può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x} = \dfrac{(\to -\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

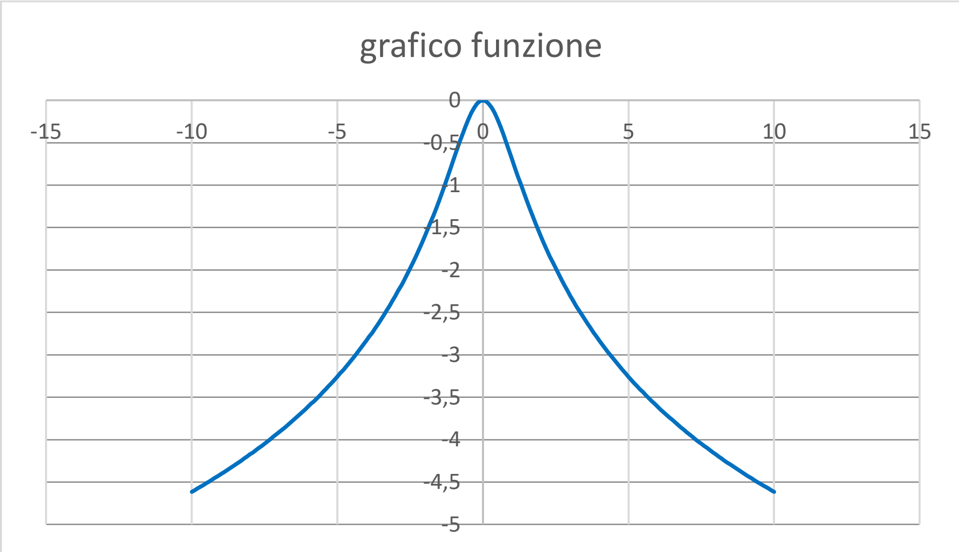
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \cdot \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{1+x^2} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{o(1+x^2)}{1+x^2} = 0.$$

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \cdot \left(-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\right) = \dfrac{-2x}{1+x^2}$. $y' > 0$ se $\dfrac{-2x}{1+x^2} > 0$ ovvero se $-2x > 0$ da cui $x < 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0, +\infty[$. Punto di massimo assoluto $x = 0$.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-2 \cdot (1+x^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2}{(1+x^2)^2} =$ $\dfrac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$. $y'' > 0$ se $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1$ da cui $x > 1$. Funzione strettamente concava in $[0,1]$, strettamente convessa in $[1, +\infty[$. Punto di flesso $F\left(1, log\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Grafico:



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^2 \left(\frac{2}{1+x} + e^{2-x}\right) dx$.

6) $\int_0^2 \left(\frac{2}{1+x} + e^{2-x}\right) dx = \left(2\, log|1+x| - e^{2-x}\right)_0^2 =$
$(2\, log\, 3 - e^0) - (2\, log\, 1 - e^2) = 2\, log\, 3 - 1 + e^2 = log\, 9 - 1 + e^2 \approx 8.59.$

7) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = log(2x)$; si determini il punto x_0 ottenuto applicando alla funzione il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 5]$.

7) La funzione f è continua e derivabile $\forall x > 0$, quindi il teorema è applicabile nell'intervallo proposto. $f(5) = log\, 10$, $f(1) = log\, 2$, e $\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{log\, 10 - log\, 2}{4} = \frac{log\, 5}{4}$. $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$; posto $\frac{1}{x} = \frac{log\, 5}{4}$ si ottiene facilmente $x_0 = \frac{4}{log\, 5} = 4\, log_5 e \approx 2.49$, unico punto che soddisfa il Teorema.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y$.

8) $\nabla f = (2x + 6, 2y - 6)$.

FOC: $\begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$; unico punto critico $P(-3, 3)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 4$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P)| = 4 > 0$; $f''_{xx}(P) = 2 > 0$. P punto di minimo.