Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

1 Settembre 2025

Compito $\mathbb{S}1^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q; verificare se la proposizione composta $\big((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q\big) \Rightarrow \big(p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big)$ risulta una tautologia.
2) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + 3x \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon \sqrt{x+2} > 1\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ ed i rispettivi insiemi di frontiera: $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.
3) (8 punti) Sia data la funzione $f(x) = e^x$ e sia $F(x) = f(2 - f(x))$. Determinare l'espressione della funzione $F(x)$, il suo Campo di Esistenza e l'espressione della sua funzione inversa.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{sen^2\, x}$;

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+4x}{4+2x}\right)^{1+x}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = log\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^2 \left(\frac{2}{1+x} + e^{2-x}\right) dx$.
7) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = log(2x)$; si determini il punto x_0 ottenuto applicando alla funzione il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 5]$.
8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.