Università degli Studi di Siena

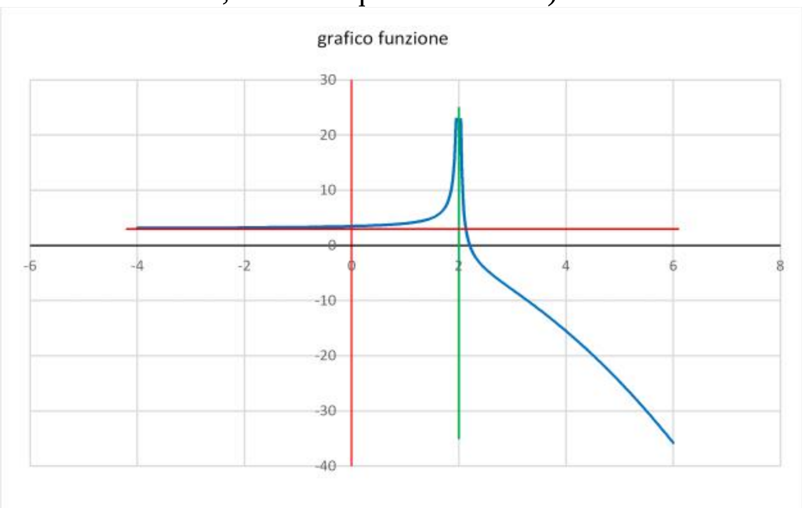
Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

11 novembre 2025

Compito B1- Riccarelli

1) Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 2 < x < 4\,\} \cup \,]-1;3[$. Indicare l'insieme frontiera di A, $\delta(A)$, e l'insieme derivato di A, $\mathcal{D}(A)$. L'insieme A è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?
$A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 2 < x < 4\,\} \cup \,]-1;3[\, = \,]2;4[\, \cup \,]-1;3[\, = \,]-1;4[$;
$\delta(A) = \{-1;4\}$ e $\mathcal{D}(A) = [-1;4]$. L'insieme A è aperto perché risulta un intervallo aperto.

2) Disegnare un possibile grafico per una funzione $f(x)$ per la quale valgono le seguenti condizioni:
1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3^+$;   2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
3. in $x = 2$ presenta una discontinuità di seconda specie.
Di seguito il grafico di una funzione che soddisfa quanto richiesto nei punti 1-3. (In rosso l'asintoto orizzontale, in verde quello verticale)



3) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni invertibili con funzioni inverse di espressioni: $f^{-1}(x) = e^{2-x}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{x}$. Determinare l'espressione della funzione $F(x) = g(f(x))$.
Se $f^{-1}(x) = e^{2-x}$, posto $y = e^{2-x}$ risulta $\log y = 2 - x$ da cui $x = 2 - \log y$, $f(x) = 2 - \log x$; con $g^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{x}$, posto $y = \dfrac{x+5}{x} = 1 + \dfrac{5}{x}$ risulta $\dfrac{5}{x} = y - 1$ da cui $x = \dfrac{5}{y-1}$, $g(x) = \dfrac{5}{x-1}$. $F(x) = g(f(x)) = g(2 - \log x) = \dfrac{5}{2 - \log x - 1} = \dfrac{5}{1 - \log x}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow (q \; o \; p))$.

$$\begin{array}{ccccc} p & q & q\,o\,p & q \Leftrightarrow (q\,o\,p) & p \Rightarrow (q \Leftrightarrow (q\,o\,p)) \\ V & V & V & V & V \\ V & F & V & F & F \\ F & V & V & V & V \\ F & F & F & V & V \end{array}.$$

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + sen\,x^2\right)^2 - cos\,x}{3\,x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + 2x^2}{3 + x^2}\right)^{\frac{x}{1-2x}}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + sen\,x^2\right)^2 - cos\,x}{3\,x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(1 + sen\,x^2\right)^2 - 1}{3\,x^2} + \frac{1 - cos\,x}{3\,x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(1 + sen\,x^2\right)^2 - 1}{sen\,x^2} \cdot \frac{sen\,x^2}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - cos\,x}{x^2} \right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot (\to 2) \cdot (\to 1) + \frac{1}{3} \cdot \left(\to \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}\,.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + 2x^2}{3 + x^2}\right)^{\frac{x}{1-2x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + 2\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2} + 1\right)} \right)^{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} - 2\right)}} =$$

$$\left(\frac{(\to 2)}{(\to 1)} \right)^{\frac{1}{(\to -2)}} = (\to 2)^{\left(\to -\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Compito $\mathbb{B}$**2**- Riccarelli

1) Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ -2 < x \leq 8\} \cup [0;3[$. Indicare l'insieme frontiera di A, $\delta(A)$, e l'insieme interno di A, $\overset{\circ}{A}$. L'insieme A è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?

$A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ -2 < x \leq 8\} \cup [0;3[\;=\;]-2;8] \cup [0;3[\;=\;]-2;8]$;

$\delta(A) = \{-2;8\}$ e $\overset{\circ}{A} = \;]-2;8[$. L'insieme A è né aperto né chiuso perché risulta un intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra.

2) Disegnare un possibile grafico per una funzione $f(x)$ per la quale valgono le seguenti condizioni:

1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; 2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5^+$

3. in $x = -3$ presenta una discontinuità di prima specie.

Nella pagina seguente il grafico di una funzione che soddisfa quanto richiesto nei punti 1-3. (In rosso l'asintoto orizzontale)

3) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni invertibili con funzioni inverse di espressioni: $f^{-1}(x) = log(6+x)$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} - 1$. Determinare l'espressione della funzione $F(x) = f(g(x))$.

Se $f^{-1}(x) = log(6+x)$, posto $y = log(6+x)$ risulta $e^y = 6 + x$ da cui $x = e^y - 6$, $f(x) = e^x - 6$; con $g^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} - 1$, posto $y = \dfrac{3}{x} - 1$ risulta $\dfrac{3}{x} = y + 1$ da cui $x = \dfrac{3}{y+1}$, $g(x) = \dfrac{3}{x+1}$. $F(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{3}{x+1}\right) = e^{\frac{3}{x+1}} - 6$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q \Rightarrow \neg(q\, e\, p)) \Leftrightarrow p$.

p	q	$q\, e\, p$	$q \Rightarrow \neg(q\, e\, p)$	$(q \Rightarrow \neg(q\, e\, p)) \Leftrightarrow p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1 + sen\, x^2} - cos\, x}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1+5x^3}{1+x^3}\right)^{10x-1}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1 + sen\, x^2} - cos\, x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[4]{1 + sen\, x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - cos\, x}{x^2}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[4]{1 + sen\, x^2} - 1}{sen\, x^2} \cdot \frac{sen\, x^2}{x^2} + \frac{1 - cos\, x}{x^2}\right) =$$

$$\left(\to \frac{1}{4}\right) \cdot (\to 1) + \left(\to \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

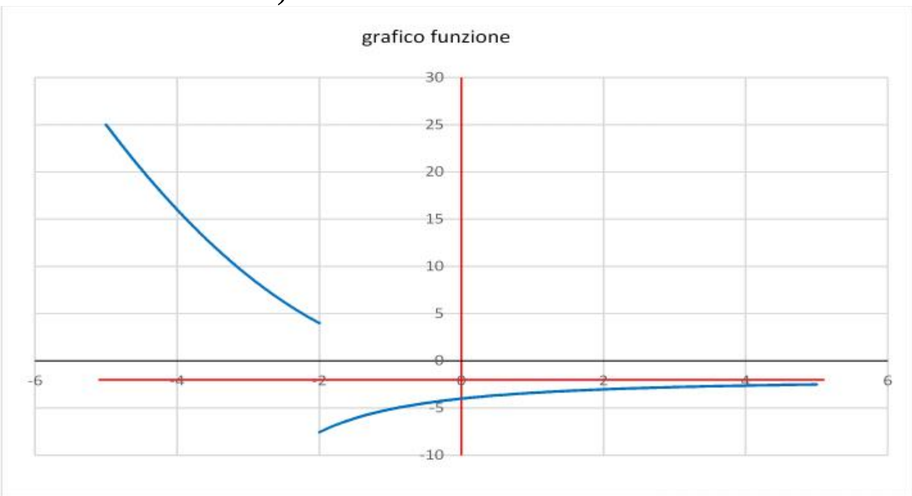
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1+5x^3}{1+x^3}\right)^{10x-1} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3}+5\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}\right)^{10x-1} =$$

$$\left(\frac{(\to 5)}{(\to 1)}\right)^{(\to -\infty)} = (\to 5)^{(\to -\infty)} = 0.$$

Compito B3- Riccarelli

1) Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ -2 \le x < 6\} \cap [0;13[$. Indicare l'insieme frontiera di A, $\delta(A)$, e l'insieme interno di A, $\mathring{A}$. L'insieme A è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?
$A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ -2 \le x < 6\} \cap [0;13[= [-2;6[\cap [0;13[= [0;6[$; $\delta(A) = \{0;6\}$ e $\mathring{A} =]0;6[$. L'insieme A è né aperto né chiuso perché risulta un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra.

2) Disegnare un possibile grafico per una funzione $f(x)$ per la quale valgono le seguenti condizioni:
1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; 2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2^{-}$
3. in $x = -2$ presenta una discontinuità di prima specie.
Di seguito il grafico di una funzione che soddisfa quanto richiesto nei punti 1-3. (In rosso l'asintoto orizzontale)



3) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni invertibili con funzioni inverse di espressioni: $f^{-1}(x) = log(2+3x)$ e $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$. Determinare l'espressione della funzione $F(x) = f(g(x))$.
Se $f^{-1}(x) = log(2+3x)$, posto $y = log(2+3x)$ risulta $e^y = 2+3x$ da cui $x = \frac{e^y - 2}{3}$, $f(x) = \frac{e^x - 2}{3}$; con $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$, posto $y = \frac{1}{x} + 3$ risulta $\frac{1}{x} = y - 3$ da cui $x = \frac{1}{y-3}$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$. $F(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x-3}} - 2}{3}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(q \Rightarrow (q\ o\ p)) \Leftrightarrow \neg p$.

p	q	$q\ o\ p$	$q \Rightarrow (q\ o\ p)$	$(q \Rightarrow (q\ o\ p)) \Leftrightarrow \neg p$
V	V	V	V	F
V	F	V	V	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - cos\,x}{tg^2 x}$; $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1+5x^2}{1+2x^2}\right)^{10+2x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \cos x}{tg^2 x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{tg^2 x} + \frac{1-\cos x}{tg^2 x} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{tg^2 x}{x^2}} + \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{tg^2 x}{x^2}} \right) = \frac{(\to \frac{1}{3})}{(\to 1)} + \frac{(\to \frac{1}{2})}{(\to 1)} = \frac{5}{6}.$$

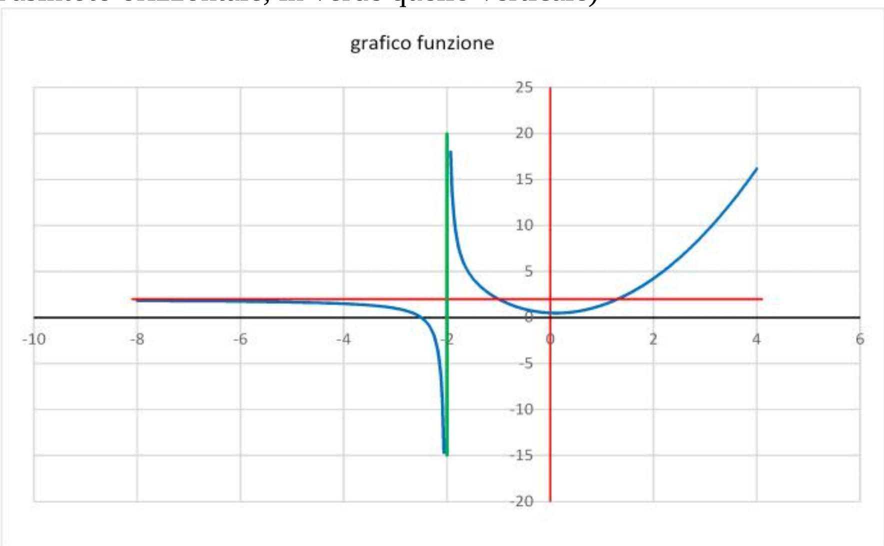
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1+5x^2}{1+2x^2} \right)^{10+2x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+5\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)} \right)^{10+2x} =$$

$$\left(\frac{(\to 5)}{(\to 2)} \right)^{(\to -\infty)} = \left(\to \frac{5}{2} \right)^{(\to -\infty)} = 0.$$

Compito B4 - Riccarelli

1) Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}\colon 2 \leq x \leq 4\} \cap]-1;3[$. Indicare l'insieme frontiera di A, $\delta(A)$, e l'insieme derivato di A, $\mathcal{D}(A)$. L'insieme A è aperto, chiuso o né aperto né chiuso?
$A = \{x \in \mathbb{R}\colon 2 \leq x \leq 4\} \cap]-1;3[= [2;4] \cap]-1;3[= [2;3[$; $\delta(A) = \{2;3\}$ e $\mathcal{D}(A) = [2;3]$. L'insieme A è né aperto né chiuso perché risulta un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra.

2) Disegnare un possibile grafico per una funzione $f(x)$ per la quale valgono le seguenti condizioni:
1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2^-$; 2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. in $x = -2$ presenta una discontinuità di seconda specie.
Di seguito il grafico di una funzione che soddisfa quanto richiesto nei punti 1-3. (In rosso l'asintoto orizzontale, in verde quello verticale)



3) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni invertibili con funzioni inverse di espressioni: $f^{-1}(x) = e^{2+3x}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-4}$. Determinare l'espressione della funzione $F(x) = g(f(x))$.

Se $f^{-1}(x) = e^{2+3x}$, posto $y = e^{2+3x}$ risulta $log\, y = 2 + 3x$ da cui $x = \dfrac{log\, y - 2}{3}$, $f(x) = \dfrac{log\, x - 2}{3}$; con $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-4}$, posto $y = \dfrac{x}{x-4}$ risulta $y(x-4) = x$ da cui $x(y-1) = 4y$ con $x = \dfrac{4y}{y-1}$, $g(x) = \dfrac{4x}{x-1}$. $F(x) = g(f(x)) =$ $g\left(\dfrac{log\, x - 2}{3}\right) = \dfrac{4 \cdot \frac{log\, x - 2}{3}}{\frac{log\, x - 2}{3} - 1} = \dfrac{4\, log\, x - 8}{log\, x - 5}$.

4) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow (q\, e\, p))$.

p	q	$q\, e\, p$	$q \Rightarrow (q\, e\, p)$	$p \Leftrightarrow (q \Rightarrow (q\, e\, p))$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	F

.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+3\,x^2)^2 - cos\, x}{sen\, x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+x^2}{3+5x^2}\right)^{10-2x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+3\,x^2)^2 - cos\, x}{sen\, x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+3\,x^2)^2 - 1}{sen\, x^2} + \frac{1 - cos\, x}{sen\, x^2}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(3 \cdot \frac{\frac{(1+3\,x^2)^2-1}{3x^2}}{\frac{sen\, x^2}{x^2}} + \frac{\frac{1-cos\, x}{x^2}}{\frac{sen\, x^2}{x^2}}\right) = 3 \cdot \frac{(\to 2)}{(\to 1)} + \frac{(\to \frac{1}{2})}{(\to 1)} = \frac{13}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+x^2}{3+5x^2}\right)^{10-2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2}+5\right)}\right)^{10-2x} =$$

$$\left(\frac{(\to 1)}{(\to 5)}\right)^{(\to -\infty)} = \left(\to \frac{1}{5}\right)^{(\to -\infty)} = +\infty.$$